

Câu 1 (4 điểm): Cho hàm số: $y = \frac{x+1}{-2x+2}$.

- (2 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.
- (1 điểm) Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị với trục tung.
- (1 điểm) Tìm m để đường thẳng $y = x - m$ cắt đồ thị của hàm số tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A đến trục hoành bằng khoảng cách từ B đến trục tung.

Câu 2 (4 điểm):

a) Giải phương trình: $\frac{1}{2} \log_2(x^2 - 4x - 1) = \log_2 8x - \log_2 4x$.

b) Tính tích phân sau: $I = \int_0^{\pi} \sin 2x \cos^2 x dx$

Câu 3 (2 điểm): Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBD) tạo với (ABCD) một góc 60° . Tìm thể tích khối chóp $SABCD$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu đi qua các đỉnh của hình chóp $SABCD$.

Câu 4 (3 điểm): Trong hệ trục tọa độ Oxyz, cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có điểm $A(4;0;0), B(0;3;0), C(2;4;0)$. Tam giác ABC là tam giác gì, khi đó tìm tọa độ điểm B' sao cho thể tích khối chóp $B'ABC$ bằng 10. Gọi I là trung điểm BB' , tìm cosin góc giữa AI và $B'C$. Biết B' có cao độ dương.

Câu 5 (2 điểm):

- Giải phương trình: $2 \cos x (\sqrt{3} \sin x + \cos x - 1) = 1$.
- Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Có bao nhiêu số có 8 chữ số lập từ các số của tập A, sao cho chữ số 1 có mặt 2 lần, chữ số 2 có mặt 3 lần, các số khác có mặt một lần.

Câu 6 (2 điểm): Cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng BC: $x - y - 4 = 0$, các điểm $H(2;0), I(3;0)$ lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Hãy lập phương trình cạnh AB biết điểm B có hoành độ không lớn hơn 3.

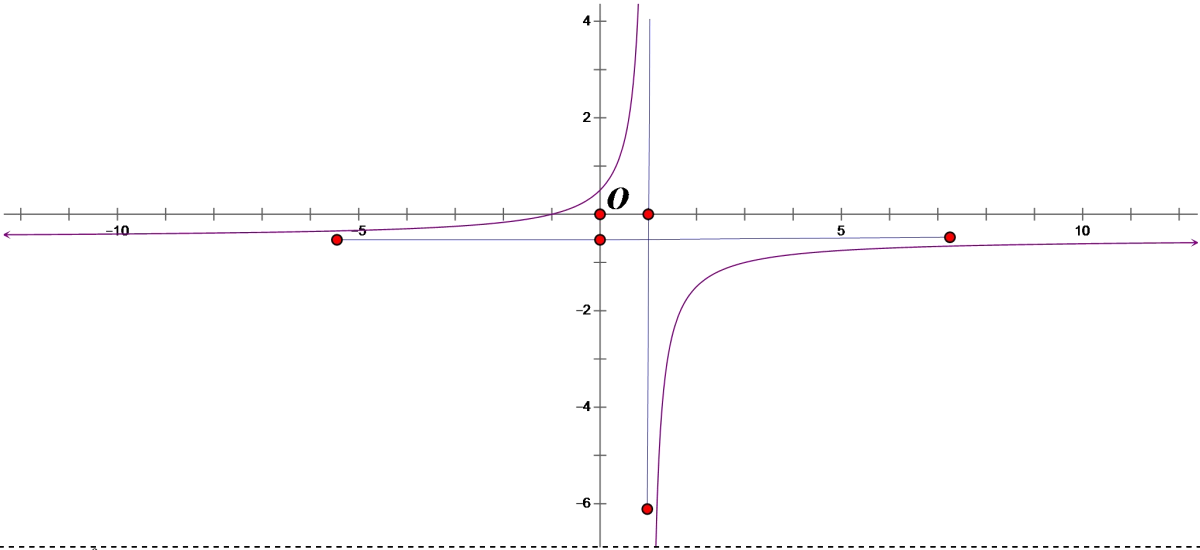
Câu 7 (2 điểm): Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = \sqrt{y^3 + 3y^2} & (1) \\ \sqrt{x-3} = \sqrt{y-x+2} & (2) \end{cases}$$

Câu 8 (1 điểm): Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn: $a + b + c = 1$, chứng minh rằng: $\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{9}{10}$

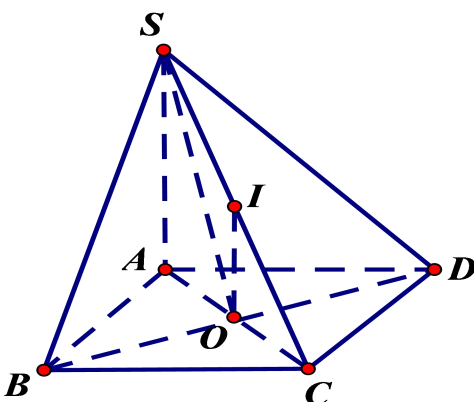
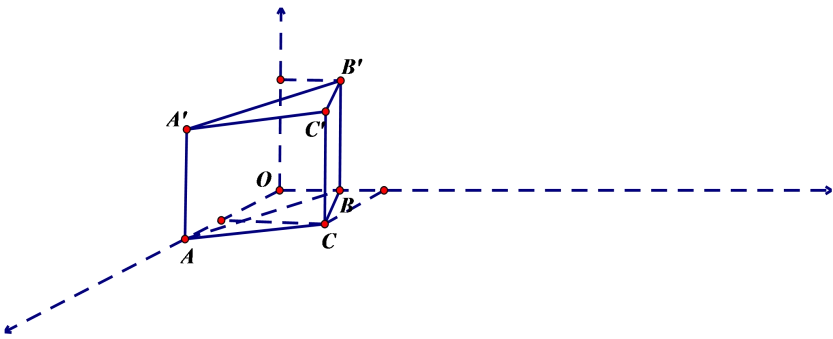
-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Cảm ơn bạn Vì Sao Lặng Lẽ (visaolangle00@gmail.com) đã gửi tới www.laisac.page.tl

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (4đ)	a.(2 điểm). +)TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$	0,25
	+) Sự biến thiên	
	- Chiều biến thiên: $y' = \frac{4}{(2x-2)^2} > 0, \forall x \neq 1$	0,25
	- Hàm số đồng biến trên các khoảng: $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$	0,25
	- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x+1}{-2x+2}\right) = -\frac{1}{2}$, do đó : $y = -\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+1}{-2x+2}\right) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x+1}{-2x+2}\right) = +\infty$, do đó : $x = 1$ là tiệm cận đứng	0,5
	- Bảng biến thiên:	0,25
	- Đồ thị: Cắt Ox tại $(-1; 0)$, cắt Oy là $(0; 1/2)$	
		0,5
	b.(1 điểm). - Gọi M là giao điểm của đồ thị với trục tung thì M có hoành độ $x = 0$, do đó $M(0; 1/2)$.	0,25
	- Hàm số có $y' = \frac{4}{(2x-2)^2}$ nên $y'(0) = 1$	0,25
	- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại M là : $y = y'(0)(x - 0) - \frac{1}{2}$	0,25
	$\Leftrightarrow y = x - \frac{1}{2}$	0,25
	c.(1 điểm) - Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng là nghiệm phương trình: $\frac{x+1}{-2x+2} = x - m \text{ (Đk: } x \neq 1)$ $\Leftrightarrow 2x^2 - (2m+1)x + 2m+1 = 0(1)$	0,25
	- Đường thẳng cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1. $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (2m+1)(2m-7) > 0 \\ 2-2m-1+1-2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{7}{2} \\ m < -\frac{1}{2} \end{cases} (2)$	0,25

	<p>- G/s x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1), theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m+1}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{2m+1}{2} \end{cases}$</p> <p>Khi đó hai giao điểm là $A(x_1; x_1 - m), B(x_2; x_2 - m)$</p>	0,25
	<p>- Theo giả thiết thì: $d(A; Ox) = d(B; Oy) \Leftrightarrow x_1 - m = x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 = x_2 + m \end{cases}$</p> <p>- Với $x_1 + x_2 = m$, kết hợp với Viet ta có: $\frac{2m+1}{2} = m$, không xảy ra.</p> <p>- Với $x_1 = x_2 + m$, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m+1}{2} \\ x_1 = x_2 + m \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{2m+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4m + 2 \\ x_2 = \frac{1}{4} \\ x_1 = m + x_2 \end{cases}.$</p> <p>Suy ra: $4m + 2 = m + \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{7}{12}$ thỏa mãn điều kiện.</p>	0,25
Câu 2 (4 đ)	<p>a(2 điểm)</p> <p>+ Đk: $\begin{cases} x^2 - 4x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 + \sqrt{5} \\ x < 2 - \sqrt{5} \Leftrightarrow x > 2 + \sqrt{5} \\ x > 0 \end{cases}$</p> <p>+ Với điều kiện đó thì phương trình tương đương với: $\frac{1}{2} \log_2(x^2 - 4x - 1) = \log_2 2$</p> <p>$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 4x - 1) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 4$</p> <p>$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$</p> <p>+ Theo điều kiện thì nghiệm là: $x=5$</p> <p>b(2 điểm)</p> <p>$+ I = 2 \int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos^3 x dx$</p> <p>- Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$</p> <p>- Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$</p> <p>- $x = \pi \Rightarrow t = -1$</p> <p>- Do đó $I = -2 \int_1^{-1} t^3 dt = 2 \int_{-1}^1 t^3 dt$</p> <p>$= \frac{1}{2} t^4 \Big _{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$</p>	0,5 0,25 0,5 0,5 0,25 0,25 0,5 0,5
Câu 3	+ Gọi O là giao điểm hai đường chéo đáy, ta có:	0,25

(2d)	 <p>- $BD \perp AC$ và $BD \perp SA$ nên: $BD \perp SO$ Suy ra: $((SBD); (ABCD)) = SOA = 60^\circ$</p>	
	<p>+ $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, tam giác SAO vuông tại A nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $SA = AO \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$</p>	0,25
	<p>+ $Dt(ABCD) = a^2$ nên $V_{SABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot dt(ABCD) = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}$ (đvtt)</p>	0,25
	<p>+ Gọi I là trung điểm SC suy ra: $IO \parallel SA \Rightarrow IO \perp (ABCD)$</p>	0,25
	<p>+ Ta có: $\triangle LAO = \triangle LBO = \triangle LCO = \triangle LDO \Rightarrow IA = IB = IC = ID$ (1)</p>	0,25
	<p>+ $\triangle SAC$ vuông tại A có AI là trung tuyến nên: $IA = IB = IC = \frac{1}{2} SC$ (2)</p>	0,25
	<p>+ Từ (1) và (2) ta có: I cách đều S, A, B, C, D nên I là tâm mặt cầu đi qua các đỉnh hình chóp. Đồng thời bán kính $R = IA = \frac{1}{2} SC$</p>	0,25
	<p>+ Theo định lý Pitago: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$ Vậy: $R = \frac{a\sqrt{14}}{4}$</p>	0,25
Câu 4 (3 đ)	<p>+ Dễ tính:</p>  <p>$AB = 5; AC = 2\sqrt{5}; BC = \sqrt{5}$</p> <p>Từ đó theo định lý Pitago thì: $CB^2 + CA^2 = AB^2$ nên tam giác ABC vuông tại C.</p> <p>+ Ta thấy $A, B, C \in (Oxy)$ và lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng nên $B' \in (Oyz)$ từ đó $B'(0; 3; c)$ với $c > 0$</p> <p>$S_{ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB = 5$ và $BB' = c$</p>	0,75 0,25 0,25 0,25

	$V_{B'ABC} = 10 \Leftrightarrow \frac{1}{3} BB'.S_{ABC} = 10 \Leftrightarrow \frac{1}{3}.5.c = 10 \Leftrightarrow c = 6$	
	Do đó: $B'(0;3;6)$	0,5
	+ I là trung điểm BB' nên: $I(0;3;3)$	0,25
	Khi đó: $\overrightarrow{AI}(-4;3;3); \overrightarrow{B'C}(2;1;-6)$	0,25
	$\cos(AI; B'C) = \cos(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{B'C}) $	0,25
	$= \frac{ \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{B'C} }{AI \cdot B'C} = \frac{ -4.2 + 3.1 - 3.6 }{\sqrt{16+9+9} \cdot \sqrt{4+1+36}} = \frac{23}{\sqrt{1394}}$	0,25
Câu 5 (2đ)	a(1 điểm)	
	- Phương trình tương đương với: $\sqrt{3} \sin 2x + 2 \cos^2 x - 2 \cos x = 1$	
	$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin 2x + 2 \cos^2 x - 1 = 2 \cos x$	
	$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \cos x$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x = \cos x$	
	$\Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \cos x$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = x + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -x + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$	0,25
	b(1 điểm)	
	+ Xem số cần lập có 8 vị trí.	
	- Xếp hai số 1 vào tám vị trí thì có: $C_8^2 = 28$ cách xếp	0,25
	- Xếp ba số 2 vào sáu vị trí còn lại có: $C_6^3 = 20$ cách xếp	0,25
	- Xếp các số 3,4,5 vào ba vị trí còn lại có: $3! = 6$ cách xếp.	0,25
	- Vậy có: $28.20.6 = 3360$ số thỏa mãn giả thiết.	0,25
Câu 6 (2đ)	+ Gọi $G(a;b)$ là trọng tâm tam giác, ta có: $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GI}$	0,25
	Trong đó: $\overrightarrow{HG}(a-2;b); \overrightarrow{GI}(3-a;-b) \Rightarrow \begin{cases} a-2=6-2a \\ b=-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{8}{3} \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow G(\frac{8}{3};0)$	0,25
	+ Gọi M là trung điểm BC thì MI vuông góc với BC nên: phương trình đường thẳng MI là: $x+y-3=0$	0,25
	$M = MI \cap BC$ nên tọa độ M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow M(\frac{7}{2};-\frac{1}{2})$	0,25
	+ Gọi $A(a;b) \Rightarrow \overrightarrow{AG}(\frac{8}{3}-a;-b)$ còn $\overrightarrow{GM}(\frac{5}{6};-\frac{1}{2})$. Ta có: $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$ nên tìm được $A(1;1)$	0,25
	+ Do đó: $R = IA = \sqrt{5}$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Gọi $B(m;m-4) \in BC$ (trong đó: $m \leq 3$)	0,25
	+ Ta có: $BI^2 = 5 \Leftrightarrow (m-3)^2 + (m-4)^2 = 5 \Leftrightarrow m = 2 \vee m = 5$	0,25

	Theo điều kiện thì $m = 2$, do đó: $B(2;-2)$	
	+ $\overline{AB}(1;-3)$ nên phương trình tổng quát đường thẳng AB là: $3(x-1)+1(y-1)=0$ hay $3x+y-4=0$	0,25
Câu 7 (2 đ)	$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = \sqrt{y^3 + 3y^2} & (1) \\ \sqrt{x-3} = \sqrt{y-x+2} & (2) \end{cases}$	
	+ ĐK: $\begin{cases} x \geq 3 \\ y^3 + 3y^2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq x-2 \end{cases} \end{cases}$	0,25
	+ Ta có $(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = y\sqrt{y+3} \Leftrightarrow (x-1)^3 - 3(x-1) = (\sqrt{y+3})^3 - 3\sqrt{y+3}$	0,25
	+ Ta thấy $\sqrt{y+3} > 1; x-1 > 1$ nên xét hàm số: $f(t) = t^3 - 3t, \forall t \geq 1$	0,25
	$f'(t) = 3t^2 - 3 \geq 0, \forall t \geq 1$ do đó hàm số: $f(t) = t^3 - 3t$ là đồng biến trên: $[1; +\infty)$	0,25
	+ Khi đó ta có: $f(x-1) = f(\sqrt{y+3})$ nên: $x-1 = \sqrt{y+3} \Leftrightarrow y = x^2 - 2x - 2$ thế vào (2) ta được: $\sqrt{x-3} = \sqrt{x^2 - 3x}$	0,5
	$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$	0,25
	+ Theo điều kiện ta có $x = 3 \Rightarrow y = 1$. Vậy hệ có nghiệm là: $(x; y) = (3; 1)$	0,25
Câu 8 (1đ)	- Theo bất đẳng thức Cauchy: $bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2; ca \leq \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-b}{2}\right)^2;$ $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-c}{2}\right)^2$	0,25
	- Do đó: $P = \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{4a}{a^2 - 2a + 5} + \frac{4b}{b^2 - 2b + 5} + \frac{4c}{c^2 - 2c + 5}$	0,25
	- Ta xét: $\frac{4x}{x^2 - 2x + 5} - \frac{99x - 3}{100} = \frac{(3x-1)^2(15-11x)}{100(x^2 - 2x + 5)} \geq 0$ với $\forall x \in (0; 1)$ - Dấu bằng xảy ra tại $x = 1/3$	0,25
	- Do đó: $P \geq \frac{99}{100}(a+b+c) - \frac{9}{100} = \frac{9}{10}$ (Đpcm) Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1/3$	0,25

Cảm ơn bạn Vì Sao Lặng Lẽ (visaolangle00@gmail.com) đã gửi tới www.laisac.page.tl