ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRƯƠNG ĐỨC THỊNH

ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC TRONG LỚP HÀM HYPERBOLIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

TRƯƠNG ĐỨC THỊNH

ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC TRONG LỚP HÀM HYPERBOLIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Phương pháp toán sơ cấp**.
Mã số: 60 46 01 13

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2015

Mục lục

Mở đầu **1**

1 Một số kiến thức chuẩn bị **3**

1.1 Các định nghĩa và tính chất của hàm hyperbolic cơ bản . . . 3

1.1.1 Hàm sin hyperbolic 3

1.1.2 Hàm cosin hyperbolic 3

1.1.3 Hàm tang hyperbolic 4

1.1.4 Hàm cotang hyperbolic 4

1.1.5 Một vài ví dụ 5

1.2 Một vài hằng đẳng thức cơ bản giữa các lớp hàm hyperbolic . 6

1.2.1 Các hằng đẳng thức cơ bản giữa các lớp hàm hyperbolic 6

1.2.2 Các ví dụ 7

1.3 Một số dạng đẳng thức giữa các lớp hàm hyperbolic 9

1.3.1 Công thức cộng 9

1.3.2 Công thức nhân 10

1.3.3 Công thức biến đổi tích thành tổng 10

1.3.4 Công thức biến đổi tổng thành tích 11

1.3.5 Các ví dụ 11

2 Một số bài toán áp dụng liên quan tới lớp hàm hyperbolic **14**

2.1 Một số lớp phương trình, bất phương trình 14

2.1.1 Các phương trình cơ bản 14

2.1.2 Ứng dụng trong giải phương trình đại số 17

2.2 Một số bất đẳng thức liên quan lớp hàm hyperbolic 28

2.2.1 Các bất đẳng thức hai biến 28

2.2.2 Các bất đẳng thức ba biến 32

2.2.3 Bất đẳng thức trong tam giác với lớp hàm hyperbolic . 35

3 Phương trình hàm trong lớp hàm lượng giác hyperbolic 43

3.1 Đặc trưng hàm của các hàm hyperbolic 43

3.2 Phương trình d'Alembert trong lớp hàm số liên tục 43

3.3 Phương trình hàm sinh bởi hàm sin hyperbolic 50

3.4 Phương trình hàm sinh bởi hàm tang hyperbolic 61

Kết luận 65

Tài liệu tham khảo 66

Mở đầu

Hàm lượng giác hyperbolic là chuyên đề quan trọng của giải tích, đặc biệt là chương trình chuyên toán bậc THPT. Các đề thi học sinh giỏi cấp Quốc gia, thi Olympic khu vực, Olympic Quốc tế thường xuất hiện bài toán sử dụng các tính chất của hàm lượng giác hyperbolic, đó là những bài toán khó và mới mẻ đối với học sinh THPT. Những cuốn sách tham khảo dành cho học sinh về lĩnh vực này là không nhiều. Đặc biệt trong các tài liệu sách giáo khoa dành cho học sinh THPT thì hàm lượng giác hyperbolic chưa được trình bày một cách hệ thống và đầy đủ.

Xuất phát từ thực tế đó, mục tiêu chính của luận văn là cung cấp thêm cho các em học sinh, đặc biệt là các em học sinh khá, giỏi, có năng khiếu và yêu thích môn toán một tài liệu tham khảo, ngoài những kiến thức lý thuyết cơ bản luận văn còn có thêm một hệ thống các bài tập về hàm lượng giác hyperbolic, các công thức biến đổi lượng giác hyperbolic và lời giải cho tường minh. Ngoài ra, đây cũng là những kết quả mà bản thân tác giả sẽ tiếp tục nghiên cứu và hoàn thiện trong quá trình giảng dạy toán tiếp theo ở trường phổ thông.

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và tài liệu tham khảo, luận văn gồm ba chương.

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị.

Trong chương này luận văn trình bày một số kiến thức liên quan đến hàm lượng giác hyperbolic, các hằng đẳng thức cơ bản giữa các lớp hàm hyperbolic.

Chương 2. Một số bài toán áp dụng liên quan tới lớp hàm hyperbolic.

Trong chương này luận văn trình bày một số lớp phương trình, bất phương trình và các bất đẳng thức liên quan.

Chương 3. Phương trình hàm trong lớp hàm lượng giác hyperbolic.

Trong chương này luận văn trình bày về phương trình hàm sinh bởi các

hàm lượng giác hyperbolic và một số bài toán áp dụng tương ứng.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của Nhà giáo nhân dân, GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới GS - Người thầy tận tâm trong công việc và đã truyền thụ nhiều kiến thức quý báu cũng như kinh nghiệm nghiên cứu khoa học cho tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu đề tài.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến Ban Giám hiệu, Phòng đào tạo sau đại học, khoa Toán - Tin của trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, cùng các thầy cô giáo đã tham giảng dạy và hướng dẫn khoa học cho lớp Cao học toán K7Q.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu và tập thể giáo viên trường THPT Trần Nhân Tông đã tạo điều kiện cho tác giả có cơ hội học tập và nghiên cứu.

Tác giả.

TRƯƠNG ĐỨC THỊNH

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1 Các định nghĩa và tính chất của hàm hyperbolic cơ bản

1.1.1 Hàm sin hyperbolic

Định nghĩa 1.1. Hàm sin hyperbolic là hàm số cho bởi công thức

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Tính chất 1.1.
a. Hàm sin hyperbolic là hàm số lẻ, có tập xác định $\mathbb{R}$ và $\sinh x \geq 0, \ \forall x \geq 0$ và $\sinh x < 0, \ \forall x < 0$.
b. Đạo hàm của hàm sin hyperbolic
$(\sinh x)' = \cosh x; (\sinh u)' = u' \cosh u$.
c. Sự biến thiên
Do $(\sinh x)' = \cosh x \geq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $\sinh x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Do $(\sinh x)'' = \sinh x$ nên hàm số $\sinh x$ lồi trên $(0; +\infty)$ và lõm trên $(-\infty; 0)$.

1.1.2 Hàm cosin hyperbolic

Định nghĩa 1.2. Hàm cosin hyperbolic là hàm số cho bởi công thức

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Tính chất 1.2.
a. Hàm cosin hyperbolic là hàm số chẵn, có tập xác định $\mathbb{R}$.

b. Đạo hàm của hàm consin hyperbolic.

$(\cosh x)' = \sinh x; (\cosh u)' = u' \sinh u.$

c. Sự biến thiên

Do $(\cosh x)' = \sinh x$ nên hàm số $\cosh x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Do $(\cosh x)'' = \cosh x \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ $\cosh x$ lồi trên $\mathbb{R}$.

1.1.3 Hàm tang hyperbolic

Định nghĩa 1.3. Hàm tang hyperbolic là hàm số cho bởi công thức

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Tính chất 1.3.

a. Hàm tang hyperbolic là hàm số lẻ, có tập xác định $\mathbb{R}$.

b. Đạo hàm của hàm tang hyperbolic

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}; (\tanh u)' = \frac{u'}{\cosh^2 u}.$$

c. Sự biến thiên

Do $(\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $\tanh x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

1.1.4 Hàm cotang hyperbolic

Định nghĩa 1.4. Hàm cotang hyperbolic là hàm số cho bởi công thức

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Tính chất 1.4.

a. Hàm cotang hyperbolic là hàm số lẻ, có tập xác định $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

b. Đạo hàm của hàm cotang hyperbolic

$$(\coth x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}; (\coth u)' = \frac{-u'}{\sinh^2 u}$$

c. Sự biến thiên

Do $(\coth x)' = \dfrac{-1}{\sinh^2 x} < 0, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ nên hàm số $\coth x$ nghịch biến trên trên mỗi khoảng $(-\infty; -1); (1; +\infty)$.

1.1.5 Một vài ví dụ

Ví dụ 1.1. Tính giá trị các hàm hyperbolic tại $\ln 2,\ \ln 3$.

Lời giải.

+ Tính giá trị các hàm hyperbolic tại $\ln 2$

$\sinh(\ln 2) = \dfrac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \dfrac{3}{4}$;

$\cosh(\ln 2) = \dfrac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \dfrac{5}{4}$; $\tanh(\ln 2) = \dfrac{3}{5}$; $\coth(\ln 2) = \dfrac{5}{3}$.

+Tính giá trị các hàm hyperbolic tại $\ln 3$

$\sinh(\ln 3) = \dfrac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{2} = \dfrac{4}{3}$,

$\cosh(\ln 3) = \dfrac{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}}{2} = \dfrac{5}{3}$; $\tanh(\ln 3) = \dfrac{4}{5}$; $\coth(\ln 3) = \dfrac{5}{4}$.

Ví dụ 1.2. Giải các phương trình bất phương trình sau

a. $e^{2x} + e^{-2x} = \dfrac{5}{2}$.

b. $e^{3x} - e^{-3x} \geq \dfrac{8}{3}$.

c. $a^x - a^{-x} < \dfrac{3}{2}, 0 < a \neq 1$.

Lời giải.

a. $e^{2x} + e^{-2x} = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \dfrac{5}{4}$

$\Leftrightarrow \cosh 2x = \cosh(\ln 2) \Leftrightarrow 2x = \pm \ln 2$ do hàm $\cosh x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \pm \ln \sqrt{2}$.

b. $e^{3x} - e^{-3x} \geq \dfrac{8}{3} \Leftrightarrow \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{2} \geq \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \sinh 3x \geq \sinh(\ln 3) \Leftrightarrow 3x \geq \ln 3$ do hàm $\sinh x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \geq \ln \sqrt[3]{3}$.

c. $a^x - a^{-x} < \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow e^{x \ln a} - e^{-x \ln a} < \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{e^{x \ln a} - e^{-x \ln a}}{2} < \dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \sinh(x \ln a) < \sinh(\ln 2) \Leftrightarrow x \ln a < \ln 2$.

Nếu $a > 1$ bất phương trình có nghiệm $x < \dfrac{\ln 2}{\ln a} \Leftrightarrow x < \log_a 2$.

Nếu $0 < a < 1$ bất phương trình có nghiệm $x > \dfrac{\ln 2}{\ln a} \Leftrightarrow x > \log_a 2$.

Ví dụ 1.3. Chứng minh bất đẳng thức

a. $\cosh x \geq 1,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

b. $-1 < \tanh x < 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

c. $\coth x > 1, \ \forall x > 0 \ \ \& \ \ \coth x < -1. \ \forall x < 0$.

d. $\sinh^3 x + \cosh^3 x \geq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

a. $\cosh x \geq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \geq \sqrt{e^x.e^{-x}} = 1$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$. Từ đó ta có điều cần chứng minh.

b. $-1 < \tanh x < 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}.$$

Do $e^{2x} > 0 \Rightarrow -1 < \tanh x < 1. \ \forall x \in \mathbb{R}$.

c. $\coth x > 1, \ \forall x > 0 \ \ \& \ \ \coth x < -1. \ \forall x < 0$

Ta có $\coth x = \dfrac{1}{\tanh x}, \forall x \neq 0$ và $-1 < \tanh x < 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$ từ đó ta có điều cần chứng minh.

d. Biến đổi theo định nghĩa và áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được

$$\sinh^3 x + \cosh^3 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^3 + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3x} + 3e^{-x}}{4}$$

$$= \frac{e^{3x} + e^{-x} + e^{-x} + e^{-x}}{4} \geq \sqrt[4]{e^{3x}.e^{-x}.e^{-x}.e^{-x}} = 1.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$. Từ đó ta có điều cần chứng minh.

1.2 Một vài hằng đẳng thức cơ bản giữa các lớp hàm hyperbolic

1.2.1 Các hằng đẳng thức cơ bản giữa các lớp hàm hyperbolic

a. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

b. $\tanh x \coth x = 1$.

c. $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

d. $\coth^2 x - 1 = \dfrac{1}{\sinh^2 x}, \forall x \neq 0$.

Chứng minh.

a. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Ta có $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$.

b. $\tanh x \coth x = 1$.

Ta có

$$\tanh x \cosh x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right) \cdot \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = 1.$$

c. $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

Do $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ nên $1 - \dfrac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$ hay $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

d. $\coth^2 x - 1 = \dfrac{1}{\sinh^2 x}, \forall x \neq 0$. Do $x \neq 0$ nên $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ và $\dfrac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x} - 1 = \dfrac{1}{\sinh^2 x}$ hay $\coth^2 x - 1 = \dfrac{1}{\sinh^2 x}, \forall x \neq 0$.

1.2.2 Các ví dụ

Ví dụ 1.4. Cho $\cosh x = 2$. Tính các giá trị $\sinh x, \tanh x, \coth x$, biết rằng $x < 0$.

Lời giải.

Ta có $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ nên $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1 = 3$ và $\sinh x = \pm\sqrt{3}$.

Do $x < 0$ nên $\sinh x < 0$. Vậy $\sinh x = -\sqrt{3}$; $\tanh x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$; $\coth x = \dfrac{-2}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 1.5. Cho $\tanh x = 3$. Tính giá trị các biểu thức sau

$$A = \frac{3\sinh x + \cosh x}{\cosh x + 2\sinh x}.$$
$$B = \sinh^2 x + 3\sinh x \cosh x - 6\cosh^2 x.$$

Lời giải. Ta có

$$A = \frac{3\dfrac{\sinh x}{\cosh x} + 1}{1 + 2\dfrac{\sinh x}{\cosh x}} = \frac{3\tanh + 1}{1 + 2\tanh x} = \frac{10}{7}.$$

Tương tự, ta có

$$\frac{B}{\cosh^2 x} = \tanh^2 x + 3\tanh x - 6.$$

Suy ra

$$B\left(1 - \tanh^2 x\right) = \tanh^2 x + 3\tanh x - 6.$$

Thay $\tanh x = 3$ ta được $B.(-8) = 12$ hay $B = -\dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 1.6. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x

$$A = \sqrt{\sinh^4 x + 2\cosh^2 x - 1} - \sqrt{\cos^4 x - 2\sinh^2 x - 1}.$$
$$B = \frac{\sinh^4 x + \cosh^4 x - 1}{\sinh^6 x - \cosh^6 x + 1}, \forall x \neq 0.$$
$$C = \left(\frac{1 - \tanh^2 x}{\tanh x}\right)^2 - \left(1 + \tanh^2 x\right)\left(1 + \coth^2 x\right).$$

Lời giải. Ta có

$$A = \sqrt{\sinh^4 x + 2(1 + \sinh^2 x) - 1} - \sqrt{\cos^4 x - 2(\cosh^2 x - 1) - 1}$$
$$= \sqrt{(\sinh^2 x + 1)^2} - \sqrt{(\cosh^2 x - 1)^2} = \sinh^2 x + 1 - \cosh^2 x + 1 = 1.$$

$$B = \frac{\sinh^4 x + \cosh^4 x - 1}{\sinh^6 x - \cosh^6 x + 1}$$
$$= \frac{\sinh^4 x + \cosh^4 x - (\cosh^2 x - \sinh^2 x)^2}{\sinh^6 x - \cosh^6 x + (\cosh^2 x - \sinh^2 x)^3}$$
$$= \frac{2\sinh^2 x\cosh^2 x}{-3\sinh^2 x\cosh^2 x} = \frac{-2}{3}.$$

$$C = \left(\frac{1 - \tanh^2 x}{\tanh x}\right)^2 - \left(1 + \tanh^2 x\right)\left(1 + \coth^2 x\right)$$
$$= \frac{1}{\tanh^2 x} - 2 + \tanh^2 x - 1 - \tanh^2 x - 1 - \coth^2 x = -4.$$

Ví dụ 1.7. Chứng minh bất đẳng thức

$$\ln\left(\cosh(2x+3)\right) \le \cosh(2x+3) - 1.$$

Lời giải. Xét hàm số $y = \ln\left(\cosh(2x+3)\right) - \cosh(2x+3), \forall x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}
y' &= 2\frac{\sinh(2x+3)}{\cosh(2x+3)} - 2\sinh(2x+3)\\
y'' &= \frac{4\cosh^2(2x+3) - 4\sinh^2(2x+3)}{\cosh^2(2x+3)} - 4\cosh(2x+3)\\
&= \frac{4}{\cosh^2(2x+3)} - 4\cosh(2x+3) \le 0, \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Do đó $y \le y\left(\dfrac{-3}{2}\right) + y'\left(\dfrac{-3}{2}\right).\left(x + \dfrac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y \le -1$ nên

$$\ln\left(\cosh(2x+3)\right) \le \cosh(2x+3) - 1.$$

1.3 Một số dạng đẳng thức giữa các lớp hàm hyperbolic

1.3.1 Công thức cộng

$$\begin{aligned}
&\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y && (1)\\
&\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y && (1')\\
&\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y && (2)\\
&\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y && (2')\\
&\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} && (3)\\
&\tanh(x-y) = \frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}. && (3')
\end{aligned}$$

Chứng minh. Ta có

$\cosh x.\cosh y + \sinh x.\sinh y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\dfrac{e^y + e^{-y}}{2} + \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$
$= \dfrac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \cosh(x+y) \Rightarrow (1)$. Trong công thức (1) thay y bằng $-y$, ta được

$$\cosh(x-y) = \cosh x \cosh(-y) + \sinh x \sinh(-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y.$$

Đây chính là $(1')$.

Các công thức còn lại được chứng minh tương tự. Từ công thức cộng ta cũng dễ dàng chứng minh được các công thức sau đây

1.3.2 Công thức nhân

$$
\begin{aligned}
&\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x \\
&\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \\
&= 2\cosh^2 x - 1 \\
&= 1 + 2\sinh^2 x \\
&\tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x} \\
&\sinh 3x = 4\sinh^3 x + 3\sinh x \\
&\cosh 3x = 4\cosh^3 x - 3\cosh x.
\end{aligned}
$$

1.3.3 Công thức biến đổi tích thành tổng

$$
\begin{aligned}
&\cosh x \cosh y = \frac{1}{2}\left[\cosh(x+y) + \cosh(x-y)\right] \\
&\sinh x \sinh y = \frac{1}{2}\left[\cosh(x+y) - \cosh(x-y)\right] \\
&\sinh x \cosh y = \frac{1}{2}\left[\sinh(x+y) + \sinh(x-y)\right].
\end{aligned}
$$

1.3.4 Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\begin{aligned}
\cosh x + \cosh y &= 2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}\\
\cosh x - \cosh y &= 2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}\\
\sinh x + \sinh y &= 2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}\\
\sinh x - \sinh y &= 2\cosh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}\\
\tanh x + \tanh y &= \frac{\sinh(x+y)}{\cosh x\cosh y}\\
\tanh x - \tanh y &= \frac{\sinh(x-y)}{\cosh x\cosh y}.
\end{aligned}$$

1.3.5 Các ví dụ

Ví dụ 1.8. Chứng minh rằng

a. $\dfrac{\sinh x + \sinh 3x + \sinh 5x}{\cosh x + \cosh 3x + \cosh 5x} = \tanh 3x.$

b. $\tanh x + \tanh 2x - \tanh 3x = \tanh x\tanh 2x\tanh 3x.$

Lời giải.

a. $\dfrac{\sinh x + \sinh 3x + \sinh 5x}{\cosh x + \cosh 3x + \cosh 5x}$

$= \dfrac{2\sinh 3x\cosh 2x + \sinh 3x}{2\cosh 3x\cosh 2x + \cosh 3x} = \tanh 3x.$

b. $\tanh x + \tanh 2x - \tanh 3x = \tanh x + \tanh 2x - \tanh(x+2x)$

$= \tanh x + \tanh 2x - \dfrac{\tanh x + \tanh 2x}{1+\tanh x\tanh 2x}.$

$$= (\tanh x + \tanh 2x)\left(1 - \frac{1}{1+\tanh x\tanh 2x}\right)$$

$$= (\tanh x + \tanh 2x)\left(\frac{\tanh x\tanh 2x}{1+\tanh x\tanh 2x}\right)$$

$$= \left(\frac{\tanh x + \tanh 2x}{1+\tanh x\tanh 2x}\right)\tanh x\tanh 2x = \tanh x\tanh 2x\tanh 3x.$$

Ví dụ 1.9. Tính các tổng sau:

$$S_n = \sinh x + \sinh 2x + \sinh 3x + \cdots + \sinh nx.$$
$$T_n = \cosh x + 2\cosh 2x + 3\cosh 3x + \cdots + n\cosh nx.$$

Lời giải. Nếu $x = 0$ thì $S_n = 0$

Xét $x \neq 0$. Nhân cả hai vế S_n với $2\sinh\dfrac{x}{2}$, ta được $2\sinh\dfrac{x}{2}S_n =$

$$2\sinh\frac{x}{2}\sinh x + 2\sinh\frac{x}{2}\sinh 2x + 2\sinh\frac{x}{2}\sinh 3x + \cdots + 2\sinh\frac{x}{2}\sinh nx$$
$$= \left(\cosh\frac{3x}{2} - \cosh\frac{x}{2}\right) + \left(\cosh\frac{5x}{2} - \cosh\frac{3x}{2}\right)$$
$$+ \left(\cosh\frac{7x}{2} - \cosh\frac{5x}{2}\right) + \cdots + \left(\cosh\frac{2n+1}{2}x - \cosh\frac{2n-1}{2}x\right)$$

$$= \cosh\frac{2n+1}{2}x - \cosh\frac{x}{2}.$$

Suy ra

$$S_n = \frac{\cosh\dfrac{2n+1}{2}x - \cosh\dfrac{x}{2}}{2\sinh\dfrac{x}{2}}.$$

Nếu $x = 0$ thì $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Xét $x \neq 0$, thì

$${S_n}' = \cosh x + 2\cosh 2x + 3\cosh 3x + \cdots + n\cosh nx.$$

Suy ra

$$T_n = {S_n}' = \left(\frac{\cosh\dfrac{2n+1}{2}x - \cosh\dfrac{x}{2}}{2\sinh\dfrac{x}{2}}\right)' =$$

$$\frac{\left(\dfrac{2n+1}{2}\sinh\dfrac{2n+1}{2}x - \dfrac{1}{2}\sinh\dfrac{x}{2}\right)2\sinh\dfrac{x}{2} - \cosh\dfrac{x}{2}\left(\cosh\dfrac{2n+1}{2}x - \cosh\dfrac{x}{2}\right)}{4\sinh^2\dfrac{x}{2}}$$

$$\frac{(2n+1)\sinh\dfrac{2n+1}{2}x.\sinh\dfrac{x}{2} - \sinh^2\dfrac{x}{2} - \cosh\dfrac{2n+1}{2}x\cosh\dfrac{x}{2} + \cosh^2\dfrac{x}{2}}{4\sinh^2\dfrac{x}{2}}$$

$$= \frac{1 + \dfrac{2n+1}{2}\left(\cosh(n+1)x - \cosh nx\right) - \dfrac{1}{2}\left(\cosh(n+1)x + \cosh nx\right)}{4\sinh^2\dfrac{x}{2}}$$

$$= \frac{1 + n\cosh(n+1)x - (n+1)\cosh nx}{4\sinh^2\dfrac{x}{2}}$$

$$= \frac{n\left(\cosh(n+1)x - \cosh nx\right) + 1 - \cosh nx}{4\sinh^2\dfrac{x}{2}}$$

$$= \frac{2n\sinh\dfrac{2n+1}{2}x\sinh\dfrac{x}{2} - 2\sinh^2\dfrac{nx}{2}}{4\sinh^2\dfrac{x}{2}}$$

$$= \frac{n\sinh\dfrac{2n+1}{2}x\sinh\dfrac{x}{2} - \sin h^2\dfrac{nx}{2}}{2\sinh^2\dfrac{x}{2}}.$$

Ví dụ 1.10. Chứng minh bất đẳng thức

$$\cosh(5x-7) \geq \sqrt{25x^2 - 70x + 50}.$$

Lời giải. Xét hàm số $y = \cosh^2(5x-7) - (5x-7)^2 + 5x - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$y' = 5\sinh\left(2(5x-7)\right) - 10(5x-7) + 5; y'' = 50\cosh\left(2(5x-7)\right) - 50 \geq 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó

$$y \geq y\left(\frac{7}{5}\right) + y'\left(\frac{7}{5}\right)\left(x - \frac{7}{5}\right).$$

Ta có $y\left(\dfrac{7}{5}\right) = 7; y'\left(\dfrac{7}{5}\right) = 5$ nên $\cosh^2(5x-7) - (5x-7)^2 + 5x - 1 \geq 7 + 5\left(x - \dfrac{7}{5}\right)$

Suy ra $\cosh^2(5x-7) \geq 25x^2 - 70x + 50$.

Từ đó ta có điều cần chứng minh $\cosh(5x-7) \geq \sqrt{25x^2 - 70x + 50}$.

Chương 2

Một số bài toán áp dụng liên quan tới lớp hàm hyperbolic

2.1 Một số lớp phương trình, bất phương trình

2.1.1 Các phương trình cơ bản

Sử dụng định nghĩa và tính chất của các hàm lượng giác hyperbolic ta xây dựng công thức nghiệm của các phương trình cơ bản sau

$\sinh x = a \Leftrightarrow x = \ln(a + \sqrt{a^2+1}), a \in \mathbb{R}.$

$\cosh x = a \Leftrightarrow x = \ln(a \pm \sqrt{a^2-1}), a \in [1; +\infty)$

$\tanh x = a \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+a}{1-a}, a \in (-1; 1)\,.$

$\coth x = a \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a+1}{a-1}, a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)\,.$

Tiếp theo ta xét một vài bài toán giải phương trình trên tập số thực như sau

Bài toán 2.1. Giải phương trình

$$\cosh 4x = \cosh^2 x.$$

Lời giải. Áp dụng công thức nhân đôi ta có phương trình tương đương

$$2\cosh^2 2x - 1 = \frac{1+\cosh 2x}{2} \Leftrightarrow 4\cosh^2 2x - \cosh 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cosh 2x = 1 \\ \cosh 2x = -\dfrac{3}{4}\ \text{(loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài toán 2.2. Giải phương trình

$$\cosh 4x = \cosh^2 3x + 2\sinh^2 x.$$

Lời giải. Áp dụng công thức góc nhân đôi ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned}
&2\cosh^2 2x - 1 = \frac{1+\cosh 6x}{2} + 2\frac{\cosh 2x - 1}{2} \\
&\Leftrightarrow 4\cosh^2 2x - 2 = 4\cosh^3 2x - \cosh 2x - 1 \\
&\Leftrightarrow 4\cosh^3 2x - 4\cosh^2 2x - \cosh 2x + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\cosh 2x - 1)\left(4\cosh^2 2x - 1\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cosh 2x = 1 \\ \cosh^2 2x = \dfrac{1}{4} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài toán 2.3. Giải phương trình

$$\sinh 3x = \cosh 2x + 4.$$

Lời giải. Áp dụng công thức nhân ba ta có phương trình tương đương

$$\sinh 3x = \cosh 2x + 4 \Leftrightarrow 4\sinh^3 x + 3\sinh x = 2\sinh^2 x + 5$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 4\sinh^3 x - 2\sinh^2 x + 3\sinh x - 5 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sinh x - 1)\left(4\sinh^2 x + 2\sinh x + 5\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sinh x = 1 \Leftrightarrow x = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Bài toán 2.4. Giải phương trình

$$3\sinh^3 x - 3\sinh^2 x\cosh x + 3\sinh x\cosh^2 x - \cosh^3 x = 0.$$

Lời giải. Chia cả 2 vế cho $\cosh^3 x$ ta được

$$\begin{aligned}
&3\frac{\sinh^3 x}{\cosh^3 x} - 3\frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} + 3\frac{\sinh x}{\cosh x} - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow 3\tanh^3 x - 3\tanh^2 x + 3\tanh x - 1 = 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2\tanh^3 x = (1-\tanh x)^3 \Leftrightarrow \tanh x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}}{1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt[3]{2}+2}{\sqrt[3]{2}}.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt[3]{2}+2}{\sqrt[3]{2}}$.

Bài toán 2.5. Giải phương trình

$$\sinh x\cosh^2 x - \sinh 2x - \sinh^2 x + \sinh x + 2\cosh x = 2.$$

Lời giải.

Phương trình biến đổi thành

$$\sinh x\cosh^2 x - 2\sinh x\cosh x + 1 - \cosh^2 x + \sinh x + 2\cosh x = 2$$
$$\Leftrightarrow \cosh^2 x\,(\sinh x - 1) - 2\cosh x\,(\sinh x - 1) + \sinh x - 1 = 0$$
$$(\sinh x - 1)\left(\cosh^2 x - 2\cosh x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sinh x = 1 \\ \cosh x = 1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Bài toán 2.6. Giải phương trình

$$\sinh 2x + \cosh 2x - 2\sinh x - 5\cosh x + 4 = 0.$$

Lời giải. Phương trình biến đổi thành

$$2\sinh x\cosh x + 2\cosh^2 x - 1 - 2\sinh x - 5\cosh x + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\sinh x\,(\cosh x - 1) + 2\cosh^2 x - 5\cosh x + 3 = 0$$
$$(\cosh x - 1)(2\sinh x + 2\cosh x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cosh x = 1 \\ 2\sinh x + 2\cosh x - 3 = 0. \end{array}\right.$$

Với $\cosh x = 1$ ta được $\cosh x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
Với $2\sinh x + 2\cosh x - 3 = 0$ ta được

$$2\sinh x + 2\cosh x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{1+\sinh^2 x} = 3 - 2\sinh x$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2\sinh x \geq 0 \\ 4\left(1+\sinh^2 x\right) = (3-2\sinh x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sinh x \leq \dfrac{3}{2} \\ \sinh x = \dfrac{5}{12} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{5}{12} + \sqrt{\left(\frac{5}{12}\right)^2 + 1}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ và $x = 0$.

Bài toán 2.7. Giải phương trình

$$\sinh 2x + 2\cosh 2x - 2\sqrt{3}\cosh x + 2 = 0.$$

Lời giải.

Phương trình biến đổi thành

$$2\sinh x\cosh x + 2\cosh^2 x + 2\sinh^2 x - 2\sqrt{3}\cosh x + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4\sinh x\cosh x + 4\cosh^2 x + 4\sinh^2 x - 4\sqrt{3}\cosh x + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4\sinh^2 x + 4\sinh x\cosh x + \cosh^2 x + 3\cosh^2 x - 4\sqrt{3}\cosh x + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (2\sinh x + \cosh x)^2 + \left(\sqrt{3}\cosh x - 2\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sinh x + \cosh x = 0 \\ \sqrt{3}\cosh x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tanh x = -\dfrac{1}{2} \\ \cosh x = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{3}\right) \\ x = \ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\dfrac{1}{3}}\right) \end{cases}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

2.1.2 Ứng dụng trong giải phương trình đại số

Một trong những ứng dụng của các hàm lượng giác hyperbolic là giải các phương trình bậc ba không cần sử dụng số phức.

Trước hết, ta xét cách giải các phương trình bậc 3 với hệ số thực.
a. Phương trình dạng $4x^3 - 3x = q$. (1).

Trường hợp 1. Nếu $|q| \le 1$ ta đặt $x = \cos t, t \in [0;\pi]$ phương trình trở thành $\cos 3t = q \Leftrightarrow t = \pm\dfrac{1}{3}\arccos q + \dfrac{k2\pi}{3}$, từ đó ta tìm được 3 nghiệm $t_1, t_2, t_3 \in [0;\pi]$ suy ra phương trình (1) có ba nghiệm $\cos t_1, \cos t_2, \cos t_3$.

Trường hợp 2. Nếu $q > 1$ ta có thể dung đạo hàm để chứng minh được phương trình có nghiệm duy nhất, ta đặt $q = \cosh 3t$ phương trình trở thành

$4x^3 - 3x = \cosh 3t \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = 4\cosh^3 t - 3\cosh t$

Suy ra phương trình có nghiệm $x = \cosh t$. Ta có

$\cosh 3t = q \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}\ln(q \pm \sqrt{q^2-1})$. Suy ra $x = \cosh\left(\dfrac{1}{3}\ln(q \pm \sqrt{q^2-1})\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \cosh\left(\dfrac{1}{3}\ln(q + \sqrt{q^2-1})\right) \\ x = \cosh\left(\dfrac{1}{3}\ln(q - \sqrt{q^2-1})\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2-1}} + \left(\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2-1}}\right)^{-1}\right) \\ x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{q - \sqrt{q^2-1}} + \left(\sqrt[3]{q - \sqrt{q^2-1}}\right)^{-1}\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2-1}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2-1}}\right) \\ x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{q - \sqrt{q^2-1}} + \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2-1}}\right) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiêm duy nhất

$x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2-1}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2-1}.}\right)$ $(*)$

Trường hợp 3. Nếu $q < -1$ viết phương trình

$$4(-x)^3 - 3(-x) = -q.$$

Đặt $y = -x$ ta được phương trình $4y^3 - 3y = -q$ đây chính là trường hợp đã xét.

b. Phương trình dạng $4x^3 + 3x = q$. (2)

Ta có thể chứng minh phương trình (2) có nghiệm duy nhất

Ta đặt $q = \sinh 3t$ ta được phương trình

$$4x^3 + 3x = \sinh 3t \Leftrightarrow 4x^3 + 3x = 4\sinh^3 t + 3\sinh t$$

Suy ra phương trình có nghiệm $x = \sinh t$. Ta có

$\sinh 3t = q \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}\ln(q \pm \sqrt{q^2+1}) \Leftrightarrow x = \sinh\left(\dfrac{1}{3}\ln(q + \sqrt{q^2+1})\right).$

Từ đó ta được nghiệm $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2+1}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2+1}}\right).$ (**)

c. Phương trình $x^3 + px = q.$(3) Ta có thể đưa phương trình (3) về được dạng (1) hoặc (2) bằng cách đặt $x = my; m^2 = \pm 4p$.

d. Xét phương trình

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0.$$

Ta chia cả hai vế cho a được

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0, a \neq 0.$$

Phương trình trên được quy về dạng (3) bằng phép đặt $y = x + \dfrac{b}{3a}$.

Ta xét mội vài bài toán minh họa sau

Bài toán 2.8. Giải phương trình $x^3 - 3x = 10$.

Lời giải. Đặt $x = my$ ta được $m^3y^3 - 3my = 10$ chọn $\dfrac{m^3}{3m} = \dfrac{4}{3}$ hay $m = 2$.

Thay vào ta được $8y^3 - 6y = 10 \Leftrightarrow 4y^3 - 3y = 5$.

Áp dụng công thức nghiệm (*) ta được

$y = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{5 + \sqrt{24}} + \sqrt[3]{5 - \sqrt{24}}\right)$. Suy ra $x = \left(\sqrt[3]{5 + \sqrt{24}} + \sqrt[3]{5 - \sqrt{24}}\right)$.

Bài toán 2.9. Giải phương trình $x^3 - 12x = -32$.

Lời giải. Đặt $x = my$ ta được $m^3y^3 - 12my = -32$ chọn $\dfrac{m^3}{12m} = \dfrac{4}{3}$ hay $m = 4$.

Ta được phương trình $64y^3 - 48y = -32 \Leftrightarrow 4y^3 - 3y = -2 \Leftrightarrow 4(-y)^3 - 3(-y) = 2$ đặt $z = -y$,

ta được $4z^3 - 3z = 2$. Áp dụng công thức nghiệm (*) ta được

$z = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}\right)$. Suy ra $x = -2\left(\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}\right)$.

Bài toán 2.10. Giải phương trình $x^3 + 5x = 1$.

Lời giải. Đặt $x = my$ ta được $m^3y^3 + 5my = 1$ chọn $\dfrac{m^3}{5m} = \dfrac{4}{3}$ hay $m = \sqrt{\dfrac{20}{3}}$.

Thay vào ta được $\dfrac{20}{3}\sqrt{\dfrac{20}{3}}y^3 + 5\sqrt{\dfrac{20}{3}}y = 1$

$\Leftrightarrow 4y^3 + 3y = \dfrac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{20}}$.

Áp dụng công thức nghiệm (**) ta được

$y = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{3} + \sqrt{527}}{5\sqrt{20}}} + \sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{3} - \sqrt{527}}{5\sqrt{20}}}\right)$. Suy ra

$x = \sqrt{\dfrac{5}{3}}\left(\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{3} + \sqrt{527}}{5\sqrt{20}}} + \sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{3} - \sqrt{527}}{5\sqrt{20}}}\right)$.

Bài toán 2.11. Giải phương trình

$$x^3 - 3x^2 + 4x + 3 = 0.$$

Lời giải. Ta biến đổi như sau

$x^3 - 3x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 + (x-1) = -5$.

Đăt $y = x - 1$ phương trình trở thành $y^3 + y = -5$.

Đặt $y = mz$ ta được $m^3z^3 + mz = -5$ chọn $\dfrac{m^3}{m} = \dfrac{4}{3}$ hay $m = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Thay vào ta được

$\dfrac{8}{3\sqrt{3}}z^3 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}z = -5 \Leftrightarrow 4z^3 + 3z = \dfrac{-15\sqrt{3}}{2}$.

Áp dụng công thức nghiệm của phương trình (2), ta được

$z = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\dfrac{-15\sqrt{3} + \sqrt{679}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{-15\sqrt{3} - \sqrt{679}}{2}}\right)$.

Suy ra

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{-15\sqrt{3} + \sqrt{679}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-15\sqrt{3} - \sqrt{679}}{2}}\right) + 1.$$

Tiếp theo, ta xây dựng lớp các phương trình tương ứng và các áp dụng liên quan.

$$\sinh u = \sinh v \Leftrightarrow 2\cos h\left(\frac{u+v}{2}\right)\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sinh\left(\frac{u-v}{2}\right) \Leftrightarrow u = v.$$
$$\sinh u = -\sinh v \Leftrightarrow 2\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos h\left(\frac{u-v}{2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sinh\left(\frac{u+v}{2}\right) \Leftrightarrow u = -v.$$
$$\cosh u = \cosh v \Leftrightarrow 2\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sinh\left(\frac{u+v}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -v \\ u = v. \end{array}\right.$$
$$\tanh u = \tanh v \Leftrightarrow \frac{\sinh(u-v)}{\cosh u \cosh v} = 0$$
$$\Leftrightarrow \sinh(u-v) \Leftrightarrow u = v.$$
$$\tanh u = -\tanh v \Leftrightarrow \frac{\sinh(u+v)}{\cosh u \cosh v} = 0$$
$$\Leftrightarrow \sinh(u+v) \Leftrightarrow u = -v.$$

Nhận xét 2.1. Nếu $a^2 - b^2 = 1$ thì tồn tại số thực u sao cho $|a| = \cosh u; b = \sinh u$. Ta xét một vài bài toán đơn giản như sau.

Bài toán 2.12. Giải phương trình
$$\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} = x\left(1+2\sqrt{1+x^2}\right).$$

Lời giải. Đặt $x = \sinh 2t$ phương trình trở thành
$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sinh^2 2t}} = \sinh 2t\left(1+2\sqrt{1+\sinh^2 2t}\right)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{\cosh^2 2t}} = \sinh 2t\left(1+2\sqrt{\cosh^2 2t}\right)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\cosh 2t} = \sinh 2t\,(1+2\cosh 2t)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cosh t = 2\sinh t\cosh t\left(1+2(1+2\sin^2 t)\right)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2} = 2\sinh t\left(3+4\sin^2 t\right)$$
$$\sinh 3t = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \sinh\left(\frac{2}{3}\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}\right).$$

Bài toán 2.13. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2-1} + x + 4 = 3\sqrt{\frac{x-1}{2}} + 5\sqrt{\frac{\mathrm{x}+1}{2}}.$$

Lời giải. Điều kiện $x \geq 1$. Đặt $x = \cosh 2t$ phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\cosh^2 2t - 1} + \cosh 2t + 4 = 3\sqrt{\frac{\cosh 2t - 1}{2}} + 5\sqrt{\frac{\cosh 2t + 1}{2}} \\
&\Leftrightarrow |\sinh 2t| + \cosh 2t + 4 = 3\,|\sinh t| + 5\cosh t.
\end{aligned}$$

Nhận xét rằng nếu phương trình có nghiệm t thì cũng có nghiệm $-t$ nên ta chỉ xét $t \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
&\sinh 2t + \cosh 2t + 4 = 3\sinh t + 5\cosh t \\
&\Leftrightarrow 2\sinh t\cosh t + 2\cosh^2 t - 1 - 3\sinh t - 5\cosh t + 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow \sinh t\,(2\cosh t - 3) + 2\cosh^2 t - 5\cosh t + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow (2\cosh t - 3)(\sinh t + \cosh t - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cosh t = \dfrac{3}{2} \\ \sinh t + \cosh t = 1. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $\cosh t = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = \dfrac{7}{2}$.

Với $\sinh t + \sqrt{\sinh^2 t + 1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\sinh^2 t + 1} = 1 - \sinh t \Leftrightarrow \sinh t = 0 \Leftrightarrow$ $t = 0 \Rightarrow x = 1$. Thay lại ta được phương trình có nghiệm $x = 1; x = \dfrac{7}{2}$.

Bài toán 2.14. Giải phương trình

$$16x^3 + 7x = 3\sqrt{1+x^2}.$$

Lời giải. Đặt $x = \sinh t$ phương trình trở thành

$16\sinh^3 t + 7\sinh t = 3\sqrt{1+\sinh^2 t}$

$\Leftrightarrow 16\sinh^3 t + 7\sinh t = 3\cosh t \Leftrightarrow 16\sinh^3 t + 12\sinh t = 5\sinh t + 3\cosh t$

$\Leftrightarrow 4\sinh^3 t + 3\sinh t = \dfrac{5}{4}\sinh t + \dfrac{3}{4}\cosh t.$

Từ $\left(\dfrac{5}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = 1$ ta được $\begin{cases} \cosh u = \dfrac{5}{4} \\ \sinh u = \dfrac{3}{4} \end{cases}$ trong đó $u = \ln 2$.

Ta được phương trình

$\sinh 3t = \cosh u \sinh t + \sinh u \cosh t \Leftrightarrow \sinh 3t = \sinh(t+u) \Leftrightarrow t = \dfrac{u}{2} = \dfrac{\ln 2}{2}.$

Thay vào ta được $x = \sinh\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}.$

Bài toán 2.15. Giải phương trình

$$32x^4 - 32x^2 - 5x + 4 = 3\sqrt{x^2-1}.$$

Lời giải. Điều kiện $\left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{array}\right.$

+Nếu $x \geq 1$. Đặt $x = \cosh t$ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} &32\cosh^4 t - 32\cosh^2 t - 5\cosh t + 4 = 3\sqrt{\cosh^2 t - 1} \\ &\Leftrightarrow 32\cosh^4 t - 32\cosh^2 t - 5\cosh t + 4 = 3\sqrt{\sinh^2 t} \\ &\Leftrightarrow 4\cosh 4t = 5\cosh t + 3\left|\sinh t\right|. \end{aligned}$$

Nhận xét rằng nếu phương trình có nghiệm t thì cũng có nghiệm $-t$ nên ta chỉ xét $t \geq 0$. Phương trình trở thành

$4\cosh 4t = 5\cosh t + 3\sin t \Leftrightarrow \cosh 4t = \dfrac{5}{4}\cosh t + \dfrac{3}{4}\sin t$

$\Leftrightarrow \cosh 4t = \cosh(t + \ln 2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4t = -t - \ln 2 \\ 4t = t + \ln 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-\ln 2}{5} \\ t = \dfrac{\ln 2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 2}{3}.$

Thay vào ta được $x = \cosh\left(\dfrac{\ln 2}{3}\right) = \dfrac{\sqrt[3]{4}+1}{2\sqrt[3]{2}}.$

+Nếu $x \leq -1$, đặt $x = -\cosh t$ phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
&32\cosh^4 t - 32\cosh^2 t + 5\cosh t + 4 = 3\sqrt{\cosh^2 t - 1}\\
&\Leftrightarrow 32\cosh^4 t - 32\cosh^2 t + 5\cosh t + 4 = 3\sqrt{\sinh^2 t}\\
&\Leftrightarrow 4\cosh 4t = -5\cosh t + 3\left|\sinh t\right|.
\end{aligned}$$

Nhận xét rằng nếu phương trình có nghiệm t thì cũng có nghiệm $-t$ nên ta chỉ xét $t \geq 0$. Phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
&4\cosh 4t = -5\cosh t + 3\sin t \Leftrightarrow \cosh 4t = -\left(\frac{5}{4}\cosh t - \frac{3}{4}\sin t\right)\\
&\Leftrightarrow \cosh 4t = -\cosh(t - \ln 2) \Leftrightarrow \varnothing.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm

$$x = \cosh\left(\frac{\ln 2}{3}\right) = \frac{\sqrt[3]{4} + 1}{2\sqrt[3]{2}}.$$

Tương tự, ta xét các bất phương trình liên quan.

Hoàn toàn tương tự ta cũng xây dựng một số bất phương trình giữa các hàm lượng giác hyperbolic cơ bản như sau.

$\sinh u \geq \sinh v \Leftrightarrow 2\cosh\left(\frac{u+v}{2}\right)\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \sinh\left(\frac{u-v}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow u \geq v.$

$\sinh u \geq -\sinh v \Leftrightarrow 2\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right) cosh\left(\frac{u-v}{2}\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \sinh\left(\frac{u+v}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow u \geq -v.$

$\cosh u \geq \cosh v \Leftrightarrow 2\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{r} u \geq |v| \\ u \leq -|v| \end{array}\right..$

$\cosh u \leq \cosh v \Leftrightarrow -|v| \leq u \leq |v|.$

$\tanh u \geq \tanh v \Leftrightarrow \dfrac{\sinh(u-v)}{\cosh u \cosh v} \geq 0 \Leftrightarrow \sinh(u-v) \geq 0 \Leftrightarrow u \geq v.$

$\tanh u \geq -\tanh v \Leftrightarrow \dfrac{\sinh(u+v)}{\cosh u \cosh v} \geq 0 \Leftrightarrow \sinh(u+v) \geq \Leftrightarrow u \geq -v.$

Ta xét một số bài toán như sau.

Bài toán 2.16. Giải bất phương trình

$$16x^5 + 20\mathrm{x}^3 + 5\mathrm{x} - 3 \geq 0.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}&\sinh 5x = \sinh(3x + 2x) = \sinh 3x \cosh 2x + \cosh 3x . \sinh 2x\\&= 16\sinh^5 x + 20\sinh^3 x + 5\sinh x.\end{aligned}$$

Đặt $x = \sinh t$ bất phương trình trở thành $16\sinh^5 t + 20\sinh^3 t + 5\sinh t \geq 3$

$$\Leftrightarrow \sinh 5t \geq 3 \Leftrightarrow 5t \geq \ln\left(3 + \sqrt{10}\right) \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{5}\ln\left(3 + \sqrt{10}\right).$$

Do hàm số $\sinh x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $x = \sinh t \geq \sinh \dfrac{1}{5}\ln\left(3 + \sqrt{10}\right) = \dfrac{\left(3 + \sqrt{10}\right)^{\frac{1}{5}} - \left(3 + \sqrt{10}\right)^{-\frac{1}{5}}}{2}$.

Vậy bất phương trình có nghiệm : $x \geq \dfrac{\left(3 + \sqrt{10}\right)^{\frac{1}{5}} - \left(3 + \sqrt{10}\right)^{-\frac{1}{5}}}{2}$.

Bài toán 2.17. Giải bất phương trình

$$48x^5 + 60x^3 - 8x^2 + 15x - 4 \geq 10x\sqrt{1 + x^2}.$$

Lời giải. Đặt $x = \sinh t$ bất phương trình trở thành

$$\begin{aligned}&48\sinh^5 t + 60\sinh^3 t + 15\sinh t \geq 10\sinh t\sqrt{1 + \sinh^2 t} + 4\left(2\sinh^2 t + 1\right)\\&\Leftrightarrow 48\sinh^5 t + 60\sinh^3 t + 15\sinh t \geq 5\sinh 2t + 4\cosh 2t\\&\Leftrightarrow 16\sinh^5 t + 20\sinh^3 t + 5\sinh t \geq \frac{5}{3}\sinh 2t + \frac{4}{3}\cosh 2t.\end{aligned}$$

$$\sinh 5t \geq \sinh(2t + \ln 3) \Leftrightarrow 5t \geq (2t + \ln 3) \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{3}\ln 3.$$

Do hàm số $\sinh x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $x = \sinh t \geq \sinh(\dfrac{1}{3}\ln 3) = \dfrac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}}{2} = \dfrac{\sqrt[3]{9} - 1}{2\sqrt[3]{3}}$. Vậy bất phương trình có nghiệm $x \geq \dfrac{\sqrt[3]{9} - 1}{2\sqrt[3]{3}}$.

Bài toán 2.18. Giải bất phương trình

$$64x^5 - 80x^3 + 15x \geq 3\sqrt{x^2-1}.$$

Lời giải. Điều kiện $\left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{array}\right.$

+Nếu $x \geq 1$. Đặt $x = \cosh t$ bất phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
&64\cosh^5 t - 80\cosh^3 t + 15\cosh t \geq 3\sqrt{\cosh^2 t - 1}\\
&\Leftrightarrow 64\cosh^5 t - 80\cosh^3 t + 20\cosh t = 5\cosh t + 3\sqrt{\sinh^2 t}\\
&\Leftrightarrow 4\cosh 5t \geq 5\cosh t + 3\left|\sinh t\right|.
\end{aligned}$$

Nhận xét rằng nếu bất phương trình có nghiệm t thì cũng có nghiệm $-t$ nên ta chỉ xét $t \geq 0$.

$4\cosh 5t \geq 5\cosh t + 3\sin t \Leftrightarrow \cosh 5t \geq \dfrac{5}{4}\cosh t + \dfrac{3}{4}\sin t \Leftrightarrow \cosh 5t \geq \cosh(t + \ln 2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5t \leq -t - \ln 2 \\ 5t \geq t + \ln 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq \dfrac{-\ln 2}{6} \\ t \geq \dfrac{\ln 2}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow t \geq \dfrac{\ln 2}{4}$. Do hàm số $\cosh x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên $x \geq \cosh\left(\dfrac{\ln 2}{4}\right) = \dfrac{\sqrt[4]{4}+1}{2\sqrt[4]{2}}$.

+ Nếu $x \leq -1$ ta đặt $x = -\cosh t$ bất phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
&-64\cosh^5 t + 80\cosh^3 t - 15\cosh t \geq 3\sqrt{\cosh^2 t - 1}\\
&\Leftrightarrow -64\cosh^5 t + 80\cosh^3 t - 20\cosh t \geq -5\cosh t + 3\sqrt{\sinh^2 t}\\
&\Leftrightarrow 4\cosh 5t \leq 5\cosh t - 3\left|\sinh t\right|.
\end{aligned}$$

Nhận xét rằng nếu bất phương trình có nghiệm t thì cũng có nghiệm $-t$ nên ta chỉ xét $t \geq 0$.

Bất phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
&4\cosh 5t \leq 5\cosh t - 3\sinh t \Leftrightarrow \cosh 5t \leq \frac{5}{4}\cosh t - \frac{3}{4}\sinh t\\
&\Leftrightarrow \cosh 5t \leq \cosh(t - \ln 2) \Leftrightarrow -\left|t - \ln 2\right| \leq 5t \leq \left|t - \ln 2\right|\\
&\Leftrightarrow 5t \leq \left|t - \ln 2\right|, (\text{do } t \geq 0)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \ge \ln 2 \\ 5t \le t - \ln 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le t \le \ln 2 \\ 5t \le -t + \ln 2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \ge \ln 2 \\ t \le \dfrac{-\ln 2}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le t \le \ln 2 \\ t \le \dfrac{\ln 2}{6} \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow 0 \le t \le \frac{\ln 2}{6}.$$

Do hàm số $-\cosh x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nên $-1 \ge x \ge -\cosh\left(\dfrac{\ln 2}{6}\right) \Leftrightarrow$ $-\dfrac{\sqrt[6]{4}+1}{2\sqrt[6]{2}} \le \mathrm{x} \le -1.$

Vậy bất phương trình có nghiệm : $\left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{\sqrt[4]{4}+1}{2\sqrt[4]{2}} \\ -\dfrac{\sqrt[6]{4}+1}{2\sqrt[6]{2}} \le \mathrm{x} \le -1. \end{array} \right.$

Bài toán 2.19. Giải bất phương trình

$$4\sqrt{x^2-1} + 2x + 8 \le 2\sqrt{2x-2} + 7\sqrt{2\mathrm{x}+2}.$$

Lời giải. Điều kiện $x \ge 1$. Đặt $x = \cosh 2t$ bất phương trình trở thành

$$4\sqrt{\cosh^2 2t - 1} + 2\cosh 2t + 8 \le 3\sqrt{2\cosh 2t - 2} + 7\sqrt{2\cosh 2t + 2}$$
$$\Leftrightarrow 4\left|\sinh 2t\right| + 2\cosh 2t + 8 \le 4\left|\sinh t\right| + 14\cosh t$$
$$\Leftrightarrow 2\left|\sinh 2t\right| + \cosh 2t + 4 \le 2\left|\sinh t\right| + 7\cosh t.$$

Nhận xét rằng nếu bất phương trình có nghiệm t thì cũng có nghiệm $-t$ nên ta chỉ xét $t \ge 0$. Bất phương trình trở thành
$\Leftrightarrow 2\sinh 2t + \cosh 2t + 4 \le 2\sinh t + \cosh t$

$$\Leftrightarrow 4\sinh t\cosh t + 2\cosh^2 t - 1 - 2\sinh t - 7\cosh t + 4 \le 0$$
$$\Leftrightarrow 2\sinh t\left(2\cosh t - 1\right) + 2\cosh^2 t - 7\cosh t + 3 \le 0$$
$$\Leftrightarrow \left(2\cosh t - 1\right)\left(2\sinh t + \cosh t - 3\right) \le 0$$
$$\Leftrightarrow 2\sinh t + \cosh t - 3 \le 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}\sinh t + \frac{1}{\sqrt{3}}\cosh t \le \sqrt{3}.$$

Từ $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$ ta được $\begin{cases} \cosh u = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ \sinh u = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ trong đó $u = \ln\sqrt{3}$.

Bất phương trình trở thành

$$\Leftrightarrow \sinh(t+\alpha) \le \sqrt{3} \Leftrightarrow t+\alpha \le \ln\left(\sqrt{3}+2\right)$$

$$\Leftrightarrow t \le \ln\left(\sqrt{3}+2\right) - \ln\sqrt{3} = \ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Thay lại ta được bất phương trình có nghiệm

$$x \le \cosh\left(2\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{35-16\sqrt{3}}{3}.$$

2.2 Một số bất đẳng thức liên quan lớp hàm hyperbolic

2.2.1 Các bất đẳng thức hai biến

Ta có công thức $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó nếu $a^2 - b^2 = 1$ thì ta có thể đặt $|a| = \cosh u; b = \sinh u$. Từ đó ta có thể xây dựng một vài bài toán đơn giản sau.

Bài toán 2.20. Cho 2 số thực $x \ge 0, y \in \mathbb{R} : x^2 - y^2 = 1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = 8x^3 + 4y^3 - 6x + 3y.$$

Lời giải. Do 2 số thực $x \ge 0, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x^2 - y^2 = 1$ nên $x \ge 1$ từ đó ta đặt $x = \cosh t; y = \sinh t$. Khi đó

$$P = 2\cosh 3t + \sinh 3t = \sqrt{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cosh 3t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh 3t\right) = \sqrt{3}\cosh(3t+z),$$

trong đó $\begin{cases} \cosh z = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ \sinh z = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ với $z = \ln\sqrt{3}$. Suy ra

$$P = \sqrt{3}\cosh\left(3t + \ln\sqrt{3}\right) \ge \sqrt{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\cosh\left(3t+\ln\sqrt{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 3t + \ln\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-\ln\sqrt{3}}{3}.$$

Thay vào cách đặt ta được

$$x = \frac{\sqrt[6]{9}+1}{2\sqrt[6]{3}}; y = \frac{1-\sqrt[6]{9}}{2\sqrt[6]{3}}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{3}$, đạt được khi

$$x = \frac{\sqrt[6]{9}+1}{2\sqrt[6]{3}}; y = \frac{1-\sqrt[6]{9}}{2\sqrt[6]{3}}.$$

Bài toán 2.21. Cho 2 số thực $x \le 0, y \in \mathbb{R} : x^2 - y^2 = 1$.Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = 8x^3 + 4y^3 - 6x + 3y + 2015.$$

Lời giải. Do 2 số thực $x \le 0, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x^2 - y^2 = 1$ nên $x \le -1$ từ đó ta đặt $x = -\cosh t; y = \sinh t$. Khi đó

$$P = -2\cosh 3t + \sinh 3t + 2015 = -\sqrt{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cosh 3t - \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh 3t\right) + 2015$$

$$= -\sqrt{3}\cosh(3t - z) + 2015,$$

trong đó $\begin{cases} \cosh z = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ \sinh z = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ với $z = \ln\sqrt{3}$. Suy ra

$$P = -\sqrt{3}\cosh\left(3t - \ln\sqrt{3}\right) + 2015 \le -\sqrt{3} + 2015.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\cosh\left(3t - \ln\sqrt{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 3t - \ln\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\ln\sqrt{3}}{3}.$$

Thay vào cách đặt ta được

$$x = -\frac{\sqrt[6]{9}+1}{2\sqrt[6]{3}}; y = \frac{\sqrt[6]{9}-1}{2\sqrt[6]{3}}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $2015 - \sqrt{3}$, đạt được khi

$$x = -\frac{\sqrt[6]{9}+1}{2\sqrt[6]{3}}; y = \frac{\sqrt[6]{9}-1}{2\sqrt[6]{3}}.$$

Bài toán 2.22. Cho 2 số thực $x \geq 0, y \in \mathbb{R} : x^2 - y^2 = 1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = 16x^4 + 8xy^3 - 16x^2 + 4xy.$$

Lời giải. Do 2 số thực $x \geq 0, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x^2 - y^2 = 1$ nên $x \geq 1$ từ đó ta đặt $x = \cosh t; y = \sinh t$. Khi đó

$$\begin{aligned}
P &= 16\cosh^4 t - 16\cosh^2 t + 2 + 8\cosh t \sinh^3 t + 4\sinh t\cosh t - 2\\
&= 2\left(8\cosh^4 t - 8\cosh^2 t + 1\right) + 2\sinh 2t(2\sinh^2 t + 1) - 2\\
&= 2\cosh 4t + \sinh 4t - 2 = \sqrt{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cosh 4t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh 4t\right) - 2\\
&= \sqrt{3}\cosh\left(4t + z\right) - 2,
\end{aligned}$$

trong đó $\begin{cases} \cosh z = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ \sinh z = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ với $z = \ln\sqrt{3}$.

Suy ra $P = \sqrt{3}\cosh\left(4t + \ln\sqrt{3}\right) - 2 \geq \sqrt{3} - 2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\cosh\left(4t + \ln\sqrt{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 4t + \ln\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{-\ln\sqrt{3}}{4}$.

Thay vào cách đặt ta được

$$x = \frac{\sqrt[8]{9} + 1}{2\sqrt[8]{3}}; y = \frac{1 - \sqrt[8]{9}}{2\sqrt[8]{3}}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{3} - 2$, đạt được khi

$$x = \frac{\sqrt[8]{9} + 1}{2\sqrt[8]{3}}; y = \frac{1 - \sqrt[8]{9}}{2\sqrt[8]{3}}.$$

Bài toán 2.23. Cho 2 số thực $x \geq 0, y \in \mathbb{R} : x^2 - y^2 = 4$.Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = 2x^5 + y^5 + 10x^3 - 5y^3 + 10x + 5y.$$

Lời giải. Do 2 số thực $x \geq 0, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x^2 - y^2 = 4$ nên $x \geq 2$ từ đó ta đặt $x = 2\cosh t; y = 2\sinh t$. Khi đó

$$\begin{aligned}
P &= 64\cosh^5 t - 80\cosh^3 t + 20\cosh t + 32\sinh^5 t + 40\sinh^3 t + 10\sinh t\\
&= 4\left(16\cosh^5 t - 20\cosh^3 t + 5\cosh t\right) + 2\left(16\sinh^5 t + 20\sinh^3 t + 5\sinh t\right)\\
&= 2\left(2\cosh 5t + \sinh 5t\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cosh 5t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh 5t\right) = 2\sqrt{3}\cosh\left(5t + z\right),
\end{aligned}$$

trong đó $\begin{cases} \cosh z = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ \sinh z = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ với $z = \ln\sqrt{3}$. Suy ra

$$P = 2\sqrt{3}\cosh\left(5t + \ln\sqrt{3}\right) \geq 2\sqrt{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\cosh\left(5t + \ln\sqrt{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 5t + \ln\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{\ln\sqrt{3}}{5}.$$

Thay vào cách đặt ta được

$$x = \frac{\sqrt[10]{9} + 1}{\sqrt[10]{3}}; y = \frac{1 - \sqrt[10]{9}}{\sqrt[10]{3}}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $2\sqrt{3}$, đạt được khi

$$x = \frac{\sqrt[8]{9} + 1}{\sqrt[8]{3}}; y = \frac{1 - \sqrt[8]{9}}{\sqrt[8]{3}}.$$

Bài toán 2.24. Cho 2 số thực $x \geq 0, y \in \mathbb{R} : x^2 - y^2 = 1$.Chứng minh rằng

$$8x^3 + 4y^3 + 2x^2 + 2y^2 - 6x + 3y > 2 + \sqrt{3}.$$

Lời giải. Do 2 số thực $x \geq 0, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x^2 - y^2 = 1$ nên $x \geq 1$ từ đó ta đặt $x = \cosh t; y = \sinh t$. Khi đó

$$\begin{aligned} VT &= 2\cosh 3t + \sinh 3t + 2\cosh^2 t + 2\sinh^2 t \\ &= \sqrt{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cosh 3t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh 3t\right) + 2\cosh 2t \\ &= \sqrt{3}\cosh(3t + z) + 2\cosh 2t, \end{aligned}$$

trong đó $\begin{cases} \cosh z = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ \sinh z = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ với $z = \ln\sqrt{3}$. Suy ra

$$VT = \sqrt{3}\cosh\left(3t + \ln\sqrt{3}\right) + 2\cosh 2t \geq 2 + \sqrt{3} = VP$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \cosh\left(3t + \ln\sqrt{3}\right) = 1 \\ \cosh 2t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \phi.$$

Vậy

$$8x^3 + 4y^3 + 2x^2 + 2y^2 - 6x + 3y > 2 + \sqrt{3}.$$

2.2.2 Các bất đẳng thức ba biến

Sử dụng các công thức nhân ba kết hợp với các bất đẳng thức Karamata, Bất đẳng thức Jensen ta xây dựng được các bài toán sau đây

Bài toán 2.25. Cho $a,\ b,\ c > 0$ thoả mãn

$$\left(a + \sqrt{a^2-1}\right)\left(b + \sqrt{b^2-1}\right)\left(c + \sqrt{c^2-1}\right) = 10.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = 4a^3 + 4b^3 + 4c^3 - 3a - 3b - 3c.$$

Lời giải. Giải thiết ta có $a,\ b,\ c \geq 1$ nên có thể đặt

$$a = \cosh x, b = \cosh y, c = \cosh z,$$

Sử dụng công thức nhân ba ta được

$$P = \cosh 3x + \cosh 3y + \cosh 3z.$$

Do hàm $\cosh x$ là hàm chẵn nên ta chỉ cần xét $x, y, z \geq 0$, khi đó ta tìm được

$$x = \ln\left(a + \sqrt{a^2-1}\right); y = \ln\left(b + \sqrt{b^2-1}\right); z = \ln\left(c + \sqrt{c^2-1}\right).$$

Do đó giả thiết viết là $x + y + z = \ln 10$.

Ta lại thấy $(\cosh(3x))'' = 9\cosh(3x) > 0, \forall x$ nên $\cosh(3x)$ là hàm lồi trên $\mathbb{R}$.

Áp dụng bất đẳng thức Jensen ta được

$$P = \cosh 3x + \cosh 3y + \cosh 3z \geq 3\cosh\left(\frac{3x+3y+3z}{3}\right).$$

Hay

$$P \geq 3ch\left(\ln 10\right) = 3\frac{e^{\ln 10} + e^{-\ln 10}}{2} = \frac{303}{20}.$$

dấu bằng xảy ra khi

$$a = b = c = \frac{\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{10^{-1}}}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{303}{20}$.

Bài toán 2.26. Cho $a,\ b,\ c > 0$ và thoả mãn

$$\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right)\left(b + \sqrt{b^2 - 1}\right)\left(c + \sqrt{c^2 - 1}\right) = 10.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = a^3 + b^3 + c^3 - \frac{3}{4}\sqrt{3ab + 3bc + 3ca}.$$

Lời giải. Ta có bất đẳng thức

$$(a + b + c)^2 \geq 3ab + 3bc + 3ca.$$

Từ đó suy ra:

$$P = a^3 + b^3 + c^3 - \frac{3}{4}\sqrt{3ab + 3bc + 3ca} \geq a^3 + b^3 + b^3 - \frac{3}{4}(a + b + c)$$
$$4P \geq 4a^3 + 4b^3 + 4c^3 - 3(a + b + c)$$

Theo bài toán 2.25 ta được $P \geq \frac{303}{80}$, dấu bằng xảy ra khi

$$a = b = c = \frac{\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{10^{-1}}}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{303}{80}$.

Bài toán 2.27. Cho $a,\ b,\ c > 0$ và thoả mãn

$$\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right)\left(2b + \sqrt{4b^2 - 1}\right)\left(c + \sqrt{c^2 - 4}\right) = 20.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = 4a^3 + 32b^3 + \frac{1}{2}c^3 - 3a - 6b - \frac{3}{2}c.$$

Lời giải. Đặt $2b = b'; \dfrac{c}{2} = c'$ ta được $a,\ b',\ c' > 0$ và thoả mãn

$$\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right)\left(b' + \sqrt{b'^2 - 1}\right)\left(c' + \sqrt{c'^2 - 1}\right) = 10$$

$$P = 4a^3 + 4b'^3 + 4c'^3 - 3a - 3b' - 3c'.$$

Theo bài toán 2.25 ta được $P \geq \dfrac{303}{20}$, dấu bằng xảy ra khi

$$a = b' = c' = \frac{\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{10^{-1}}}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{303}{20}$.

Bài toán 2.28. Cho $a,\ b,\ c > 0$ và thoả mãn

$$\left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right)\left(b + \sqrt{b^2 + 1}\right)\left(c + \sqrt{c^2 + 1}\right) = 10.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = 4a^3 + 4b^3 + 4c^3 + 3a + 3b + 3c.$$

Lời giải. Đặt

$$a = \sinh x, b = \sinh y, c = \sinh z,$$

do $a,\ b,\ c > 0$ nên $x, y, z > 0$, khi đó ta tìm được

$$x = \ln\left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right); y = \ln\left(b + \sqrt{b^2 + 1}\right); z = \ln\left(c + \sqrt{c^2 + 1}\right).$$

Do đó giả thiết viết là $x + y + z = \ln 10$.

Sử dụng công thức nhân ba ta được

$$P = \sinh 3x + \sinh 3y + \sinh 3z.$$

Ta lại thấy $(\sinh(3x))'' = 9\sinh(3x) > 0, \forall x > 0$ nên $\sinh(3x)$ là hàm lồi trên $(0; +\infty)$.

Áp dụng bất đẳng thức Jensen ta được

$$P = \sinh 3x + \sinh 3y + \sinh 3z \geq 3\sinh\left(\frac{3x + 3y + 3z}{3}\right).$$

Hay

$$P \geq 3\sinh(\ln 10) = 3\frac{e^{\ln 10} - e^{-\ln 10}}{2} = \frac{297}{20},$$

dấu bằng xảy ra khi

$$a = b = c = \frac{\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{10^{-1}}}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{297}{20}$.

Bài toán 2.29. Cho $a > 0; b > -1;\ c > 1$ và thoả mãn

$$\left(a + \sqrt{a^2+1}\right)\left(b + 1 + \sqrt{b^2+2b+2}\right)\left(c - 1 + \sqrt{c^2-2c+2}\right) = 10.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = 4a^3 + 4b^3 + 4c^3 + 12b^2 - 12c^2 + 3a + 15b + 15c.$$

Lời giải. Đặt $b + 1 = b'; c - 1 = c'$ thì $a,\ b', c' > 0$. Ta được

$$\left(a + \sqrt{a^2+1}\right)\left(b' + \sqrt{b'^2+1}\right)\left(c' + \sqrt{c'^2+1}\right) = 10.$$

Khi đó

$$P = 4a^3 + 4b'^3 + 4c'^3 + 3a + 3b' + 3c'.$$

Theo bài toán 2.28

$$P \geq 3\sinh(\ln 10) = 3\frac{e^{\ln 10} - e^{-\ln 10}}{2} = \frac{297}{20}$$

dấu bằng xảy ra khi

$$a = b' = c' = \frac{\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{10^{-1}}}{2}.$$

Suy ra

$$a = \frac{\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{10^{-1}}}{2}; b = \frac{\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{10^{-1}}}{2} - 1; c = \frac{\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{10^{-1}}}{2} + 1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{297}{20}$.

2.2.3 Bất đẳng thức trong tam giác với lớp hàm hyperbolic

Sử dung các công thức biến đổi các hàm hyperbolic với các góc trong tam giác kết hợp với các bất đẳng thức Karamata, Bất đẳng thức Jensen ta xây dựng được các bài toán sau đây

Bài toán 2.30. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\sinh 3A + \sinh 3B + \sinh 3C \geq 3\sinh\pi.$$

Lời giải. Ta có thể giải bài toán theo hai cách như sau

Cách 1: Biến đổi trực tiếp dựa vào tính chất $\cosh x \geq 1.\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&\sinh 3A + \sinh 3B + \sinh 3C + \sinh\pi \\
&= 2\sinh\frac{3A+3B}{2}\cosh\frac{3A-3B}{2} + 2\sinh\frac{3C+\pi}{2}\cosh\frac{3C-\pi}{2} \\
&\geq 2\sinh\frac{3A+3B}{2} + 2\sinh\frac{3C+\pi}{2} \\
&= 4\sinh\frac{3A+3B+3C+\pi}{4}\cosh\frac{3A+3B-3C-\pi}{4} \\
&\geq 4\sinh\frac{3A+3B+3C+\pi}{4} = 4\sinh\pi.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sinh 3A + \sinh 3B + \sinh 3C \geq 3\sinh\pi.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}
\cosh\dfrac{3A-3B}{2} = 1 \\
\cosh\dfrac{3C-\pi}{2} = 1 \\
\cosh\dfrac{3A+3B-3C-\pi}{4} = 1
\end{cases}$$

$\Leftrightarrow A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$.

Cách 2: Xét hàm số $y = \sinh x$. Do $(\sinh x)'' = \sinh x > 0, \forall x > 0$ nên hàm số $\sinh x$ lồi trên $(0; +\infty)$ nên

$$\begin{aligned}
&\sinh 3A + \sinh 3B + \sinh 3C \geq 3\sinh\frac{3A+3B+3C}{3} \\
&\Leftrightarrow \sinh 3A + \sinh 3B + \sinh 3C \geq 3\sinh\pi.
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$.

Ta có thể tổng quát thành bài toán sau:Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\sinh A + \sinh B + \sinh C \geq 3\sinh\frac{k\pi}{3}, k > 0.$$

Bài toán 2.31. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\cosh kA + \cosh kB + \cosh kC \geq 3\cosh k\frac{\pi}{3}, k > 0.$$

Lời giải. Xét hàm số $y = \cosh x$ Do $(\cosh x)'' = \cosh x \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $\cosh x$ lồi trên $\mathbb{R}$ nên

$$\cosh kA + \cosh kA + \cosh kA \geq 3\cosh k\frac{A+B+C}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cosh kA + \cosh kA + \cosh kA \geq 3\cosh k\frac{\pi}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$.

Bài toán 2.32. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\tanh kA + \tanh kA + \tanh kA \geq 3\tanh k\frac{\pi}{3}, k > 0.$$

Lời giải. Xét hàm số $y = \tanh x$. Do $(\tanh x)'' = \dfrac{2\tanh x}{\cosh^2 x} > 0, \forall x > 0$. Suy ra $y = \tanh x$ lồi trên $(0; +\infty)$ nên

$$\tanh kA + \tanh kA + \tanh kA \geq 3\tanh k\frac{A+B+C}{3}, k > 0$$

$$\Leftrightarrow \tanh kA + \tanh kA + \tanh kA \geq 3\tanh k\frac{\pi}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \frac{\pi}{3}$.

Bài toán 2.33. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\sinh^2\frac{A}{2} + \sinh^2\frac{B}{2} + \sinh^2\frac{C}{2} \geq \frac{3}{2}\left(\cosh\frac{\pi}{3} - 1\right).$$

Lời giải. Ta có công thức

$$\sinh^2\frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{2}$$

nên

$$\sinh^2\frac{A}{2} + \sinh^2\frac{B}{2} + \sinh^2\frac{C}{2} = \frac{\cosh A - 1}{2} + \frac{\cosh B - 1}{2} + \frac{\cosh C - 1}{2}$$
$$= \frac{\cosh A + \cosh B + \cosh C}{2} - \frac{3}{2}.$$

Áp dụng bài toán 2.31 với k=1 ta được

$$\cosh A + \cosh B + \cosh C \geq 3\cosh\frac{\pi}{3}.$$

Suy ra

$$\sinh^2\frac{A}{2}+\sinh^2\frac{B}{2} + \sinh^2\frac{C}{2} \geq \frac{3}{2}\left(\cosh\frac{\pi}{3} - 1\right).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$.

Bài toán 2.34. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\cosh^2\frac{A}{2}+\cosh^2\frac{B}{2} + \cosh^2\frac{C}{2} \geq \frac{3}{2}\left(\cosh\frac{\pi}{3} + 1\right).$$

Lời giải. Ta có công thức

$$\cosh^2\frac{x}{2} = \frac{\cosh x + 1}{2}$$

nên

$$\cosh^2\frac{A}{2}+\cosh^2\frac{B}{2} + \cosh^2\frac{C}{2} = \frac{\cosh A + 1}{2} + \frac{\cosh B + 1}{2} + \frac{\cosh C + 1}{2}$$
$$= \frac{\cosh A + \cosh B + \cosh C}{2} + \frac{3}{2}.$$

Áp dụng bài toán 2.31 với $k = 1$, ta được

$$\cosh A + \cosh B + \cosh C \geq 3\cosh\frac{\pi}{3}.$$

Suy ra

$$\cosh^2\frac{A}{2}+\cosh^2\frac{B}{2} + \cosh^2\frac{C}{2} \geq \frac{3}{2}\left(\cosh\frac{\pi}{3} + 1\right).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$.

Bài toán 2.35. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\sinh A+ \sinh B + \sinh C \geq \sinh\frac{\pi - A}{2} + \sinh\frac{\pi - B}{2} + \sinh\frac{\pi - C}{2}.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
\sinh A+\sinh B &= 2\sinh\frac{A+B}{2}\cosh\frac{A-B}{2} \geq 2\sinh\frac{\pi-C}{2},\\
\sinh B+\sinh C &= 2\sinh\frac{B+C}{2}\cosh\frac{B-C}{2} \geq 2\sinh\frac{\pi-A}{2},\\
\sinh C+\sinh A &= 2\sinh\frac{C+A}{2}\cosh\frac{C-A}{2} \geq 2\sinh\frac{\pi-B}{2}.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\sinh A+\sinh B+\sinh C \geq \sinh\frac{\pi-A}{2}+\sinh\frac{\pi-B}{2}+\sinh\frac{\pi-C}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$.

Bài toán 2.36. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có

$$\sinh\frac{A}{2}+\sinh\frac{B}{2}+\sinh\frac{C}{2} \geq \tanh\frac{A}{2}+\tanh\frac{B}{2}+\tanh\frac{C}{2}.$$

Lời giải. Xét hàm số $y=\sinh\dfrac{x}{2}-\tanh\dfrac{x}{2}; \forall x\geq 0$. Do

$$y'=\frac{1}{2}\cosh\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}},$$

$$y''=\frac{1}{4}\sinh\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sinh\frac{x}{2}}{\cosh^3\frac{x}{2}} \geq 0, \forall x\geq 0.$$

Suy ra $y(x)\geq y(0)+y'(0).(x-0), \forall x\geq 0$. Do đó $\sinh\dfrac{x}{2}-\tanh\dfrac{x}{2}\geq 0; \forall x\geq 0$.

Thay x lần lượt bởi $A,\ B,\ C$ vào bất đẳng thức rồi cộng vế ta được điều phải chứng minh

$$\sinh\frac{A}{2}+\sinh\frac{B}{2}+\sinh\frac{C}{2} \geq \tanh\frac{A}{2}+\tanh\frac{B}{2}+\tanh\frac{C}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$.

Bài toán 2.37. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$$3(\sinh A+\sinh B+\sinh C) \geq \pi\left(\frac{\sinh A}{A}+\frac{\sinh B}{B}+\frac{\sinh C}{C}\right).$$

Lời giải. Xét hàm số $y = x - \tanh x$. Ta có $y' = 1 - \dfrac{1}{\cosh^2 x} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $y = x - \tanh x$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $y \geq y(0), \forall x \geq 0$.

Suy ra $x - \tanh x \geq 0, \forall x \geq 0$ nên $x \geq \tanh x, \forall x \geq 0$. Xét hàm số $y = \dfrac{\sinh x}{x}$. Ta có $y' = \dfrac{x\cosh x - \sinh x}{x^2} = \dfrac{\cosh x\,(x - \tanh x)}{x} > 0, \forall x > 0$.

Do đó hàm số $y = \dfrac{\sinh x}{x}$ là hàm số đồng biến $(0; +\infty)$.

Giả sử $A \geq B \geq C$ ta có

$$\frac{\sinh A}{A} \geq \frac{\sinh B}{B} \geq \frac{\sinh C}{C}.$$

Theo bất đẳng thức Chebyshev, ta có

$$(A + B + C)\left(\frac{\sinh A}{A} + \frac{\sinh B}{B} + \frac{\sinh C}{C}\right) \leq 3\,(\sinh A + \sinh B + \sinh C).$$

Từ đó suy ra

$$3\,(\sinh A + \sinh B + \sinh C) \geq \pi\left(\frac{\sinh A}{A} + \frac{\sinh B}{B} + \frac{\sinh C}{C}\right).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$.

Bài toán 2.38. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\sinh A \sinh B \sinh C \leq \sinh^3 \frac{\pi}{3}.$$

Lời giải. Xét hàm số $y = \ln(\sinh x), \forall x > 0$. Ta có $y'' = \dfrac{-1}{\sinh^2 x} < 0, \forall x > 0$.

Do đó hàm số $y = \ln(\sinh x)$ là hàm số lõm trên $(0; +\infty)$ nên ta có bất đẳng thức:

$$\ln(\sinh A) + \ln(\sinh B) + \ln(\sinh C) \leq 3\ln\left(\sinh\frac{A + B + C}{3}\right).$$

Suy ra

$$\ln(\sinh A \sinh B \sinh C) \leq \ln\left(\sinh^3\frac{\pi}{3}\right).$$

Vì hàm số $y = \ln x$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên ta có điều phải chứng minh

$$\sinh A \sinh B \sinh C \leq \sinh^3 \frac{\pi}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$.

Bài toán 2.39. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\cosh A \cosh B \cosh C \geq \cosh^3 \frac{\pi}{3}.$$

Lời giải. Xét hàm số $y = \ln(\cosh x), \forall x > 0$.Ta có $y'' = \dfrac{-1}{\cosh^2 x} > 0, \forall x > 0$.

Do đó hàm số $y = \ln(\cosh x)$ là hàm số lồi trên $(0; +\infty)$ nên ta có bất đẳng thức

$$\ln(\cosh A) + \ln(\cosh B) + \ln(\cosh C) \leq 3 \ln \left(\cosh \frac{A+B+C}{3} \right).$$

Suy ra

$$\ln\left(\cosh A \cosh B \cosh C\right) \geq \ln \left(\cosh^3 \frac{\pi}{3} \right).$$

Vì hàm số $y = \ln x$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên ta có điều phải chứng minh

$$\cosh A \cosh B \cosh C \leq \cosh^3 \frac{\pi}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$.

Bài toán 2.40. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có

$$\sinh A + \sinh B + \sinh C - \tanh A - \tanh B - \tanh C \geq 3 \left(\sinh \frac{\pi}{3} - \tanh \frac{\pi}{3} \right).$$

Lời giải. Xét hàm số $y = \sinh x - \tanh x; \forall x > 0$. Ta có

$y' = \cosh x - \dfrac{1}{\cosh^2 x}$, $y'' = \sinh x + \dfrac{\sinh x}{\cosh^3 x} > 0, \forall x > 0$.

Do đó hàm số $y = \sinh x - \tanh x$ là hàm số lồi trên $(0; +\infty)$ nên ta có bất đẳng thức

$$\frac{(\sinh A - \tanh A) + (\sinh B - \tanh B) + (\sinh C - \tanh C)}{3}$$
$$\geq \left(\sinh \frac{A+B+C}{3} - \tanh \frac{A+B+C}{3} \right).$$

Suy ra

$$\sinh A + \sinh B + \sinh C - \tanh A - \tanh B - \tanh C \geq 3 \left(\sinh \frac{\pi}{3} - \tanh \frac{\pi}{3} \right).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$.

Bài toán 2.41. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có

$$\sinh^2\frac{A}{2}+\sinh^2\frac{B}{2}+\sinh^2\frac{C}{2}>\frac{A^2+B^2+C^2}{4}.$$

Lời giải. Ta có công thức

$$\sinh^2\frac{x}{2}=\frac{\cosh x-1}{2}$$

nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\cosh A+\cosh B+\cosh C-3\geq\frac{A^2+B^2+C^2}{2}.$$

Xét hàm số $y=2\cosh x-x^2;\forall x\geq 0$. Ta có

$$y'=2\sinh x-2x, y''=2\cosh x-1\geq 0,\forall x\geq 0.$$

Suy ra $y(x)>y(0)+y'(0).(x-0),\forall x>0$ nên $2\cosh x-x^2>2;\forall x>0$.

Lần lượt thay x bởi $A,\ B,\ C$ vào bất đẳng thức trên ta được rồi cộng từng vế các bất đẳng thức đó, ta được

$$\left(2\cosh A-A^2\right)+\left(2\cosh B-B^2\right)+\left(2\cosh C-C^2\right)>6.$$

Suy ra

$$\cosh A+\cosh B+\cosh C-3>\frac{A^2+B^2+C^2}{2}.$$

Chương 3

Phương trình hàm trong lớp hàm lượng giác hyperbolic

3.1 Đặc trưng hàm của các hàm hyperbolic

a) Hàm sin hyperbolic $f(x) = \sinh x := \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ có tính chất

$$f(3x) = 3f(x) + 4[f(x)]^3, \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Hàm cosin hyperbolic $g(x) = \cosh x := \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ có tính chất

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

c) Hàm tang hyperbolic $h(x) = \tanh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ có tính chất

$$h(x+y) = \frac{h(x) + h(y)}{1 + h(x)h(y)},\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

d) Hàm cotang hyperbolic $q(x) = \coth x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ có tính chất

$$q(x+y) = \frac{1 + q(x)q(y)}{q(x) + q(y)},\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}, x + y \neq 0.$$

3.2 Phương trình d'Alembert trong lớp hàm số liên tục

Bằng cách thay hàm cos, cosh trong công thức biến đổi

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y,\ \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

$$\cosh(x+y)+\cosh(x-y)=2\cosh x\cosh y,\ \ \forall x,y\in\mathbb{R},$$

bằng hàm f ta sẽ có hai bài toán sau:

Bài toán 3.1. Tìm các hàm $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}, \\ f(0)=1,\exists x_0\in\mathbb{R} \text{ sao cho } |f(x_0)|<1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Lời giải. Vì $f(0)=1$ và $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên

$$\exists\varepsilon>0 \text{ sao cho } f(x)>0,\forall x\in(-\varepsilon,\varepsilon). \tag{3.2}$$

Khi đó theo (3.2) với $n_0\in\mathbb{N}$ đủ lớn thì $f\Big(\dfrac{x_0}{2^{n_0}}\Big)>0$.

Nhận xét rằng $f\Big(\dfrac{x_0}{2^n}\Big)<1,\forall n\in\mathbb{N}$.

Thật vậy, giả sử $f\Big(\dfrac{x_0}{2^n}\Big)\geq 1$ với n nguyên dương nào đó thì theo (3.1) ta có

$$\begin{aligned} &f\Big(\frac{x_0}{2^{n-1}}\Big)=2\Big[f\Big(\frac{x_0}{2^n}\Big)\Big]^2-1\geq 1\\ \Rightarrow\ &f\Big(\frac{x_0}{2^{n-2}}\Big)=2\Big[f\Big(\frac{x_0}{2^{n-1}}\Big)\Big]^2-1\geq 1\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\Rightarrow f(x_0)=2\Big[f\Big(\frac{x_0}{2}\Big)\Big]^2-1\geq 1 \text{ trái với giả thiết } |f(x_0)|<1. \end{aligned}$$

Vậy tồn tại $x_1\neq 0$ sao cho $0<f(x_1)<1$ và $f(x)>0,\forall x\in\Big(-|x_1|,|x_1|\Big)$ (chỉ cần chọn $x_1=\dfrac{x_0}{2^{n_0}}$). Đặt $f(x_1)=\cos\alpha, 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Từ (3.1) suy ra

$$f(2x_1)=2[f(x_1)]^2-1=2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha.$$

Giả sử, $f(kx_1)=\cos k\alpha,\forall k=1,2,\ldots,n\in\mathbb{N}^+$, khi đó

$$\begin{aligned} f((n+1)x_1)&=f(nx_1+x_1)=2f(nx_1)f(x_1)-f((n-1)x_1)\\ &=2\cos n\alpha\cos\alpha-\cos(n-1)\alpha=\cos(n+1)\alpha. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $f(mx_1)=\cos m\alpha,\forall m\in\mathbb{N}^+$.

Mặt khác, đổi vai trò của x và y trong (3.1), ta có

$$f(x-y)=f(y-x),\forall x,y\in\mathbb{R},$$

do đó $f(x)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ và như vậy

$$f(mx_1) = \cos n\alpha, \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{3.3}$$

Cho $x = y = \dfrac{x_1}{2}$ từ (3.1) ta nhận được

$$\Big[f\Big(\frac{x_1}{2}\Big)\Big]^2 = \frac{1 + f(x_1)}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \Big(\cos\frac{\alpha}{2}\Big)^2, \text{ do vậy } f\Big(\frac{x_1}{2}\Big) = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Giả sử $f\Big(\dfrac{x_1}{2^k}\Big) = \cos\dfrac{\alpha}{2^k}, \forall k = 1, 2, \ldots, n \in \mathbb{N}^+$.

Khi đó cho $x = y = \dfrac{x_1}{2^{k+1}}$, từ (3.1) ta thu được

$$\Big[f\Big(\frac{x_1}{2^{n+1}}\Big)\Big]^2 = \frac{1}{2} + f\Big(\frac{x_1}{2^n}\Big) = \frac{1+\cos\dfrac{\alpha}{2^n}}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}.$$

Do vậy

$$f\Big(\frac{x_1}{2^n}\Big) = \cos\frac{\alpha}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Từ (3.3) và (3.4) cho ta

$$f\Big(\frac{mx_1}{2^n}\Big) = \cos\frac{m\alpha}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^+, \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{3.5}$$

Vì $f(x)$ và $\cos x$ là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên từ (3.5) suy ra

$$f(x_1 t) = \cos\alpha t \Leftrightarrow f(x) = \cos ax, \ \Big(\text{ với } a = \frac{\alpha}{x_1}, \forall x \in \mathbb{R}\Big).$$

Thử lại ta thấy $f(x) = \cos ax (a \neq 0)$ thỏa mãn các điều kiện bài toán.

Kết luận: $f(x) = \cos ax, \ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Bài toán 3.2. Tìm các hàm $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ f(0) = 1, \exists x_0 \in \mathbb{R} \text{ sao cho } f(x_0) > 1. \end{cases} \tag{3.6}$$

Lời giải. Vì $f(0) = 1$ và $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ nên

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ sao cho } f(x) > 0, \forall x \in \big(-\varepsilon, \varepsilon\big). \tag{3.7}$$

Khi đó theo (3.7) với $n_0 \in \mathbb{N}$ đủ lớn thì $f\Big(\dfrac{x_0}{2^{n_0}}\Big) > 0$.

Nhận xét rằng $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) > 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Thật vậy, nếu tồn tại $n \in \mathbb{N}^+$ sao cho $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) \leq 1$ thì theo (3.6) ta có

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{x_0}{2^{n-1}}\right) = 2\left[f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right]^2 - 1 \leq 1,\\
\Rightarrow &f\left(\frac{x_0}{2^{n-2}}\right) = 2\left[f\left(\frac{x_0}{2^{n-1}}\right)\right]^2 - 1 \leq 1,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\Rightarrow &f(x_0) = 2\left[f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right]^2 - 1 \leq 1, \text{ trái với giả thiết } f(x_0) > 1.
\end{aligned}$$

Do đó tồn tại $x_1 \neq 0$ sao cho $f(x_1) > 1$ và $f(x) > 0, \forall x \in -(|x_1|, |x_1|)$, (chỉ cần chọn $x_1 = \dfrac{x_0}{2^{n_0}}$).

Đặt $f(x_1) = \cosh\alpha, 0 < \alpha$, từ (3.6) suy ra

$$f(2x_1) = 2[f(x_1)]^2 - 1 = 2\cosh^2\alpha - 1 = \cosh 2\alpha.$$

Giả sử $f(kx_1) = \cosh k\alpha, \forall k = 1, 2, .., m \in \mathbb{N}^+$, khi đó

$$\begin{aligned}
f((m+1)x_1) =&f(mx_1 + x_1) = 2f(mx_1)f(x_1) - f((m-1)x_1)\\
=&2\cosh m\alpha \cosh\alpha - \cosh(m-1)\alpha = \cosh(m+1)\alpha.
\end{aligned}$$

Suy ra $f(mx_1) = \cosh m\alpha, \forall m \in \mathbb{N}^+$.

Mặt khác, đổi vai trò của x và y trong (3.6) ta có, $f(x-y) = f(y-x), \forall x, y \in \mathbb{R}$, suy ra $f(x)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ và do đó

$$f(mx_1) = \cosh m\alpha, \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{3.8}$$

Cho $x = y = \dfrac{x_1}{2}$, từ (3.6) ta nhận được

$$\left[f\left(\frac{x_1}{2}\right)\right]^2 = \frac{1 + f(x_1)}{2} = \frac{1 + \cosh\alpha}{2} = \cosh^2\frac{\alpha}{2}.$$

Do vậy

$$f\left(\frac{x_1}{2}\right) = \cosh\frac{\alpha}{2}$$

Giả sử $f\left(\dfrac{x_1}{2^k}\right) = \cosh\dfrac{\alpha}{2^k}, \forall k = 1, 2, \ldots, n \in \mathbb{N}^+$.

Khi đó cho $x = y = \dfrac{x_1}{2^{n+1}}$, từ (3.6) ta thu được

$$\left[f\left(\frac{x_1}{2^{n+1}}\right)\right]^2 =\frac{1}{2}\left[1 + f\left(\frac{x_1}{2^n}\right)\right] = \frac{1 + \cosh\dfrac{\alpha}{2^n}}{2} = \cosh^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}.$$

Do vậy

$$f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = \cosh\frac{\alpha}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Từ (3.8) và (3.9) cho ta

$$f\left(\frac{mx_1}{2^n}\right) = \cosh\frac{m\alpha}{2^n}, \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{3.10}$$

Vì $f(x)$ và $\cosh x$ là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên từ (3.10) ta có

$$\begin{aligned} &f(x_1 t) = \cosh\alpha \\ \Leftrightarrow &f(x) = \cosh ax, \text{ với } a = \frac{\alpha}{x_1}, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Thử lại ta thấy $f(x) = \cosh ax, (a \neq 0)$ rõ ràng thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

Kết luận: $f(x) = \cosh ax$, trong đó $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$.

Nhận xét 3.1. Dễ kiểm tra thấy hàm $f \equiv 0$ và $f \equiv 1$ cũng thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Do đó từ bài toán 3.1 và bài toán 3.2 ta có định lý về nghiệm của bài toán phương trình hàm d'Alembert.

Định lí 3.1 (Định lý nghiệm của phương trình hàm d'Alembert)**.** *Nếu hàm $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, liên tục và thỏa mãn*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)\ \ x, y \in \mathbb{R},$$

thì hàm f là một trong các hàm sau:

$$\begin{aligned} &f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \\ &f(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}, \\ &f(x) = \cosh(\alpha x), \\ &f(x) = \cos(\beta x), \end{aligned}$$

trong đó α, β là các hằng số thực khác 0.

Bài toán 3.3. Cho $a \in \mathbb{R}$, $(\alpha \neq 0)$ tìm các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x-y+a) - f(x+y+a) = 2f(x)f(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Lời giải. Dễ kiểm tra thấy $f \equiv 0$ thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. Xét $f \not\equiv 0$ khi đó, thay y bằng $-y$ vào (3.11), ta có

$$f(x+y+a) - f(x-y+a) = 2f(x)f(y). \tag{3.12}$$

Từ (3.11) và (3.12) ta có

$f(x)f(y) = -f(x)f(y),\ \ x, y \in \mathbb{R},$ suy ra $f(y) = -f(y),\ \ \forall y \in \mathbb{R}$ do $f \not\equiv 0$.

Suy ra $f(x)$ là hàm lẻ.

Đổi vai trò của x và y cho nhau trong (3.11) ta có

$$f(y-x+a) - f(x+y+a) = 2f(x)f(y)\ \ x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

Từ (3.11) và (3.13), ta có

$f(x-y+a) = f(y-x+a) = f(-(x-y)+a) = -f(x-y-a)$ vì f là hàm lẻ.

Suy ra

$$f(x-y+a) = -f(x-y-a). \tag{3.14}$$

Cho $y = 0$ thay vào (3.14) ta có

$$\begin{aligned}
&f(x+a) = -f(x-a),\\
\Rightarrow\ &f(x+2a) = -f(x),\\
\Rightarrow\ &f(x+3a) = -f(x+a),\\
\Rightarrow\ &f(x+4a) = -f(x+2a) = f(x),\ \ \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ta thay x bằng $x+a$ và y bằng $y+a$ vào (3.11) ta được

$$\begin{aligned}
&f(x-y+a) - f(x+y+3a) = 2f(x+a)f(y+a),\ \ x, y \in \mathbb{R}.\\
\Rightarrow &f(x-y+a) + f(x+y+a) = 2f(x+a)f(y+a),\ \ x, y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Đặt $g(x) = f(x+a)$, suy ra $g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y)$

Từ tính liên tục của hàm $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ suy ra hàm $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Từ $g(x+y)+g(x-y)=2g(x)g(y),\ \ x,y\in\mathbb{R}$ ta có $g(x)$ là một trong bốn hàm sau

$$g\equiv 0,\ \ g\equiv 1,\ \ g(x)=\cosh(kx),\ \ g(x)=\cos(kx),\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Trường hợp 1: Nếu $g(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, suy ra $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ không thỏa mãn (trái với giải thiết $f\not\equiv 0$).

Trường hợp 2: Nếu $g(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, suy ra $f(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ không thỏa mãn (3.11) nên không là nghiệm của bài toán.

Trường hợp 3: Nếu $g(x)=\cosh(kx),\ \forall x\in\mathbb{R}$, suy ra
$f(x)=\cosh[k(x-a)]$ không thỏa mãn vì $\cosh[k(x-a)]$ không là hàm tuần hoàn.

Trường hợp 4: Nếu $g(x)=\cos(kx),\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ suy ra $f(x)=\cos(k(x-a))$.

Mà ta đã chứng minh được $f(x+4a)=f(x)$ nên, ta có

$$\begin{aligned}
&f(x+4a)=\cos(k(x+4a-a))=f(x)=\cos(k(x-a)),\\
&\Rightarrow \cos(k(x+3a))=\cos(k(x-a)),\ \ (\text{ chọn } x=x+a),\\
&\text{suy ra } \cos(k(x+4a))=\cos(kx)\Rightarrow 4ka=2\pi\Rightarrow k=\frac{\pi}{2a}.
\end{aligned}$$

Suy ra $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2a}(x-a)\right),\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Thử lại ta thấy hàm $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2a}(x-a)\right),\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Kết luận: $f\equiv 0$; $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2a}(x-a)\right),\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét 3.2. Từ kết quả và cách giải của bài toán 3.3 thì ta có các bài toán khi cho a các giá trị cụ thể khác nhau. Ví dụ khi cho $a=\dfrac{\pi}{2}$ ta có bài toán sau.

Tìm các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x-y+\frac{\pi}{2})-f(x+y+\frac{\pi}{2})=2f(x)f(y),\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Sử dụng cách giải như bài toán 3.3 ta được nghiệm của bài toán $f(x)=\sin x$.

3.3 Phương trình hàm sinh bởi hàm sin hyperbolic

Trước hết ta có biến đổi lượng giác sau

$$\begin{aligned}\sinh^2 x - \sinh^2 y &= \frac{\cosh 2x - 1}{2} - \frac{\cosh 2y - 1}{2}\\ &= \frac{1}{2}(\cosh x - \cosh 2y)\\ &= \sinh(x+y)\sinh(x-y).\end{aligned}$$

Từ đó nếu $f(x) = \sin x$ thì ta có $f(x-y)f(x+y) = f(x)^2 - f(y)^2,\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Xuất phát từ đặc trưng hàm này ta có bài toán.

Bài toán 3.4. Xác định các hàm $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ thỏa mãn

$$f(x-y)f(x+y) = f(x)^2 - f(y)^2,\ \ x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.15}$$

Lời giải. Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1: $f \equiv 0$, dễ kiểm tra $f \equiv 0$ là nghiệm của (3.15)

Trường hợp 2: $f \not\equiv 0$, nên tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) \neq 0$. Đặt

$$\phi(x) = \frac{f(x+x_0) - f(x-x_0)}{2f(x_0)},\ \ x \in \mathbb{R}. \tag{3.16}$$

Từ (3.15) và (3.16) ta có

$$\begin{aligned}2\phi(x)\phi(y) &= \frac{1}{2f(x_0)^2}[f(x+x_0) - f(x-x_0)][f(y+y_0) - f(y-y_0)]\\ &= \frac{1}{2f(x_0)^2}[f(x+x_0)f(y+y_0) - f(x-x_0)f(y+y_0)\\ &\qquad - f(x+x_0)f(y-y_0) + f(x-x_0)f(y-y_0)]\\ &= \frac{1}{2f(x_0)^2}\Big[f\Big(\frac{x+y}{2} + x_0 + \frac{x-y}{2}\Big)f\Big(\frac{x+y}{2} + x_0 - \frac{x-y}{2}\Big)\\ &\qquad - f\Big(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} - y_0\Big)f\Big(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} + x_0\Big)\\ &\qquad - f\Big(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} + x_0\Big)f\Big(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} - x_0\Big)\\ &\qquad + f\Big(\frac{x+y}{2} - x_0 + \frac{x-y}{2}\Big)f\Big(\frac{x+y}{2} - x_0 - \frac{x-y}{2}\Big)\Big]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2f(x_0)^2}\Big[f\Big(\frac{x+y}{2}+x_0\Big)^2 - f\Big(\frac{x-y}{2}\Big)^2 - f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)^2 \\
&\qquad + f\Big(\frac{x-y}{2}-x_0\Big)^2 - f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)^2 - f\Big(\frac{x-y}{2}+x_0\Big)^2 \\
&\qquad + f\Big(\frac{x+y}{2}-x_0\Big)^2 - f\Big(\frac{x-y}{2}\Big)^2\Big] \\
&= \frac{1}{2f(x_0)^2}\Big[f\Big(\frac{x+y}{2}+x_0\Big)^2 - f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)^2 + f\Big(\frac{x-y}{2}+x_0\Big)^2 \\
&\qquad - \Big(\frac{x-y}{2}\Big)^2 - f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)^2 + f\Big(\frac{x+y}{2}-x_0\Big)^2 \\
&\qquad - f\Big(\frac{x-y}{2}\Big)^2 - f\Big(\frac{x-y}{2}-x_0\Big)^2\Big] \\
&= \frac{1}{2f(x_0)^2}[f(x+y+x_0)f(x_0) + f(x-y+x_0)f(x_0) \\
&\qquad - f(x+y-x_0)f(x_0) - f(x-y-x_0)f(x_0) \\
&= \phi(x+y) + \phi(x-y).
\end{aligned}
$$

Suy ra hàm $\phi : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ thỏa mãn phương trình sau

$$\phi(x+y) + \phi(x-y) = 2\phi(x)\phi(y), \ \ x, y \in \mathbb{R},$$

và nghiệm là

$$\phi(x) = \frac{E(x) + E^*(x)}{2}.$$

Đặt $u = x + y$ và $v = x - y$ thì (3.15) trở thành

$$f(u)f(v) = f\Big(\frac{u+v}{2}\Big)^2 - f\Big(\frac{u-v}{2}\Big)^2, \ \ \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Nếu $f(y) \neq 0$, đặt $\alpha = x_0$ ta có

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(x+y) - f(x-y)}{2f(y)} = \frac{f(x+y)f(\alpha) - f(x-y)f(\alpha)}{2f(y)f(\alpha)} \\
&= \frac{f(\frac{x+y+\alpha}{2})^2 - f(\frac{x+y-\alpha}{2})^2 - f(\frac{x-y+\alpha}{2})^2 + f(\frac{x-y-\alpha}{2})^2}{2f(y)f(\alpha)} \\
&= \frac{f(\frac{x+y+\alpha}{2})^2 - f(\frac{x+\alpha-y}{2})^2 - f(\frac{x-\alpha+y}{2})^2 + f(\frac{x-\alpha-y}{2})^2}{2f(y)f(\alpha)} \\
&= \frac{f(x+\alpha)f(y) - f(x-\alpha)f(y)}{2f(y)f(\alpha)}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{f(x+\alpha) - f(x-\alpha)}{2f(\alpha)}$$
$$= \phi(x).$$

Suy ra

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)\phi(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.17}$$

Mặt khác ta có $\phi(0) = 1$, suy ra $f(-y) = -f(y), \ \ \forall y \in \mathbb{R}$, suy ra (3.17) trở thành

$$f(x+y) + f(y-x) = 2f(y)\phi(x). \tag{3.18}$$

Đổi vai trò của x và y trong (3.18), ta có

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\phi(y). \tag{3.19}$$

Cộng hai vế của (3.18) và (3.19) ta có

$$f(x+y) = f(x)\phi(y) + f(y)\phi(x)$$

Mặt khác ở đây $f(x)$ là hàm lẻ và $\phi(x)$ là hàm chẵn nên

$$f(x) = A(x), \ \ f(x) = \frac{E(x) - E^*(x)}{2\alpha}(\alpha \neq 0).$$

ở đây $E : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ là hàm exponential, $A : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ là hàm cộng tính.

Thử lại ta thấy $f(x) = A(x), \ \ f(x) = \dfrac{E(x) - E^*(x)}{2\alpha}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Kết luận:

$$f \equiv 0, \ \ f(x) = A(x), \ \ f(x) = \frac{E(x) - E^*(x)}{2\alpha}, \text{ trong đó } (\alpha = \text{const} \neq 0),$$

$E : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ là hàm exponential, $A : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ là hàm cộng tính.

Nhận xét 3.3. Nếu bổ sung thêm điều kiện hàm cần tìm là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thì ta được bài toán

Xác định hàm $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Và từ nghiệm của bài toán 3.4 ta có nghiệm của bài toán là

$$\begin{aligned} f(x) &= k_1 x, \\ f(x) &= k_2 \sin(k_3 x), \\ f(x) &= k_4 \sinh(k_5 x), \end{aligned}$$

trong đó k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 là các hằng số thực.

Từ công thức biến đổi

$$\cos(x+y)\sin(x-y) = \frac{1}{2}(\sin 2x - \sin 2y) = \cos x \sin x - \cos y \sin y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Nếu thay hàm $f(x) = \cos x$ và $g(x) = \sin x$ thì ta được

$$f(x+y)g(x-y) = f(x)g(x) - f(y)g(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ đặc trưng hàm này ta có bài toán sau.

Bài toán 3.5. Tìm các hàm $f, g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ thỏa mãn

$$f(x+y)g(x-y) = f(x)g(x) - f(y)g(y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.20}$$

Lời giải. Nếu $f(x)$ là hàm hằng, giải sử $f(x) = k, \ \forall x \in \mathbb{R}$ khi đó (3.20) trở thành

$$kg(x-y) = kg(x) - kg(y),$$

suy ra

$$k[g(x-y) - g(x) + g(y)] = 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.21}$$

Nếu $k = 0$ thì hàm $g(x)$ là tùy ý vậy ta có nghiệm trong trường hợp này là: $f \equiv 0$ và g là hàm tùy ý.

Nếu $k \neq 0$ thì từ (3.21) ta có

$$g(x-y) = g(x) - g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.22}$$

Cho $x = 0$ thay vào (3.22) ta được

$$g(-y) = g(0) - g(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{3.23}$$

Ta lại có, thay y bằng $-y$ vào (3.22) thì được

$$g(x+y) = g(x) - g(-y).$$

Kết hợp với (3.23) ta được

$$g(x+y) = g(x) + g(y) - g(0), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.24}$$

Đặt $A : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ cho bởi $A(x) = g(x) - g(0)$, khi đó (3.24) trở thành

$$A(x+y) = A(x) + A(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.25}$$

Suy ra $A(x)$ là hàm cộng tính, suy ra $g(x) = A(x) + \delta$ trong đó $\delta = g(0)$.

Vậy nghiệm bài toán trong trường hợp này là: $f(x) = k, \ \forall x \in \mathbb{R}$ và $g(x) = A(x) + \delta$, trong đó $A(x)$ là hàm cộng tính và δ là hằng số tùy ý.

Nếu $g(x)$ là hàm hằng, giả sử $g(x) = k, \ \forall x \in \mathbb{R}$ khi đó (3.20) trở thành

$$k[f(x+y) - f(x) + f(y)] = 0, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.26}$$

Nếu $k = 0$ thì $f(x)$ là hàm tùy ý. Vậy nghiệm của bài toán trong trường hợp này là $f(x)$ là hàm tùy ý và $g(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Nếu $k \neq 0$ thì từ (3.26) ta có

$$f(x+y) = f(x) - f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.27}$$

Cho $x = 0$ thay vào (3.27) ta được

$$f(y) = f(0) - f(y) \Rightarrow 2f(y) = f(0), \forall y \in \mathbb{R}.$$

hay $f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra, nghiệm của bài toán trong trường hợp này là $f \equiv 0$ và $g \equiv k$ với $k \neq 0$.

Xét hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ không là hàm hằng.

Đổi vai trò của x và y trong (3.20) Ta có

$$f(x+y)g(y-x) = f(y)g(y) - f(x)g(x), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.28}$$

Từ (3.20) và (3.28) ta có

$$f(x+y)g(x-y) = -f(x+y)g(y-x), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.29}$$

Đặt $u = x + y$ và $v = x - y$ khi đó (3.29) trở thành

$$f(u)g(v) = -f(u)g(-v), \ \forall u, v \in \mathbb{R}. \tag{3.30}$$

Vì $f(x)$ không là hàm hằng nên tồn tại một $u_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(u_0) \neq 0$.

Cho $u = u_0$ thay vào (3.30) ta được

$$g(v) = -g(-v), \ \forall v \in \mathbb{R},$$

suy ra hàm $g(x)$ là hàm lẻ.

Đặt $\psi(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ và $\phi(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$, dễ thấy hàm $\psi(x)$ là hàm chẵn, hàm $\phi(x)$ là hàm lẻ và

$$f(x) = \psi(x) + \phi(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.31}$$

Thay (3.31) vào (3.20) ta có,

$$\begin{aligned} &\psi(x+y)g(x-y) + \phi(x+y)g(x-y) \\ &\qquad = \psi(x)g(x) - \psi(y)g(y) + \phi(x)g(x) - \phi(y)g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Thay x bằng $-x$ và y bằng $-y$ và sử dụng tính chất $\psi(x)$ là hàm lẻ, $\phi(x)$ là hàm chẵn ta được

$$\begin{aligned} &-\psi(x+y)g(x-y) + \phi(x+y)g(x-y) \\ &\qquad = -\psi(x)g(x) + \psi(y)g(y) + \phi(x)g(x) - \phi(y)g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Cộng vế với vế của (3.32) và (3.33) ta được,

$$\phi(x+y)g(x-y) = \phi(x)g(x) - \phi(y)g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.34}$$

Từ (3.32) và (3.34) ta có

$$\psi(x+y)g(x-y) = \psi(x)g(x) - \psi(y)g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.35}$$

Thay y bằng $-y$ vào (3.34) ta có,

$$\phi(x-y)g(x+y) = \phi(x)g(x) - \phi(y)g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.36}$$

Từ (3.34) và (3.36) ta có

$$\phi(x+y)g(x-y) = \phi(x-y)g(x+y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.37}$$

Đặt $u = x + y$ và $v = x - y$ thay vào (3.37) ta có

$$\phi(u)g(v) = \phi(v)g(u), \ \forall u, v \in \mathbb{R}. \tag{3.38}$$

Vì hàm $g(x)$ không là hàm hằng nên từ (3.38) ta có

$$\phi(x) = \alpha g(x) \text{ trong đó } \alpha = \text{const}, \ \ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{3.39}$$

Trường hợp 1: Nếu $\alpha \neq 0$, thì thay (3.39) vào (3.34) ta có

$$\phi(x+y)\phi(x-y) = \phi(x)^2 - \phi(y)^2, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{3.40}$$

mà $g(x)$ không là hàm hằng suy ra hàm $\phi(x)$ cũng không là hàm hằng nên nghiệm của phương trình hàm (3.40) là:

$$\phi(x) = A(x) \text{ trong đó } A(x) \text{ hàm cộng tính,}$$

hoặc

$$\phi(x) = \frac{E(x) - E^*(x)}{2b} \text{ trong đó } E(x) \text{ là hàm exponential,} b \neq 0.$$

Khi đó từ (3.39) ta có

$$g(x) = \frac{1}{\alpha} A(x), \tag{3.41}$$

hoặc

$$g(x) = \frac{E(x) - E^*(x)}{2b\alpha}. \tag{3.42}$$

Cho $y = -x$ thay vào (3.35) kết hợp với tính chất hàm $g(x)$ là hàm lẻ, hàm $\psi(x)$ là hàm chẵn, ta có

$$\psi(0)g(2x) = 2\psi(x)g(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.43}$$

Nếu $\psi(0) = 0$ thì (3.43) trở thành

$$\psi(x)g(x) = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.44}$$

Thay (3.44) vào (3.35) ta có

$$\psi(x+y)g(x-y) = 0, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

suy ra $\psi \equiv 0$ hoặc $g \equiv 0$. Mà $g(x)$ và $f(x)$ không là hàm hằng nên $\psi \equiv 0$. Mặt khác $\phi(x) = \alpha g(x)$ nên ϕ không là hàm hằng, mà $f(x) = \psi(x) + \phi(x)$ nên $\psi \not\equiv 0$. Suy ra $\psi(0) \neq 0$.

Vì $\psi(0) \neq 0$, đặt $\delta = \psi(0)$ thay vào (3.43) ta có

$$g(2x) = \frac{2}{\delta}\psi(x)g(x), \text{ trong đó } \delta := \psi(0), \tag{3.45}$$

thay (3.41) vào (3.45) ta có

$$\psi(x) = \delta \forall x \in \mathbb{R}, \text{ suy ra } f(x) = \phi(x) + \psi(x) = A(x) + \delta,$$

và

$$g(x) = \frac{1}{\alpha}A(x) = \beta A(x), \text{ trong đó } \beta = \text{const}, \ \ \beta \neq 0.$$

Suy ra, nghiệm của bài toán trong trường hợp này là:

$$\begin{cases} f(x) & = A(x) + \delta \\ g(x) & = \beta A(x), \end{cases}$$

trong đó β là các hằng số khác 0, $A(x)$ là hàm cộng tính.

Thay (3.42) vào (3.45) ta được

$$\frac{1}{\alpha b}\frac{E(2x) - E^*(2x)}{2} = \frac{2}{\delta}\psi(x)\frac{1}{\alpha b}\frac{E(x) - E^*(x)}{2},$$

suy ra

$$E(x) + E^*(x) = \frac{2}{\delta}\psi(x) \Leftrightarrow \psi(x) = \delta\frac{E(x) + E^*(x)}{2},$$

suy ra

$$\begin{aligned} f(x) =& \phi(x) + \psi(x) \\ =& \frac{E(x) - E^*(x)}{2b} + \delta\frac{E(x) + E^*(x)}{2} \\ =& \gamma\frac{E(x) - E^*(x)}{2} + \delta\frac{E(x) + E^*(x)}{2} \end{aligned}$$

và

$$g(x) = \frac{1}{\delta b}\frac{E(x) - E^*(x)}{2} = \beta\frac{E(x) - E^*(x)}{2},$$

ở đây β là hàng số khác 0. Suy ra nghiệm của bài toán trong trường hợp này là:

$$\begin{cases} f(x) & = \gamma\dfrac{E(x) - E^*(x)}{2} + \delta\dfrac{E(x) + E^*(x)}{2} \\ g(x) & = \beta\dfrac{E(x) - E^*(x)}{2} \end{cases}$$

Trường hợp 2: Nếu $\alpha = 0$ nên từ (3.39) ta có $\phi \equiv 0$ suy ra, $f = \psi$.

Khi đó phương trình (3.35) trở thành

$$\psi(x + y)g(x - y) = \psi(x)g(x) - \psi(y)g(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Cho $y = -x$ ta được

$$\psi(0)g(2x) = 2\psi(x)g(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Do $\psi(0) \neq 0$ nên ta có, đặt $\delta = \psi(0)$ khi đó

$$g(2x) = \frac{2}{\delta}\psi(x)g(x), \text{ ở đây } \delta := \psi(0).$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&g(x+y)g(x-y) \\
&\quad =\frac{4}{\delta^2}\Big[\psi\Big(\frac{x+y}{2}\Big)g\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\psi\Big(\frac{x-y}{2}\Big)\Big(\frac{x-y}{2}\Big)\Big] \\
&\quad =\frac{4}{\delta^2}\Big[\psi\Big(\frac{x}{2}\Big)g\Big(\frac{x}{2}\Big)-\psi\Big(\frac{y}{2}\Big)g\Big(\frac{y}{2}\Big)\Big]\Big[\psi\Big(\frac{x}{2}\Big)g\Big(\frac{x}{2}\Big)+\psi\Big(\frac{y}{2}\Big)g\Big(\frac{y}{2}\Big)\Big] \\
&\quad =\frac{4}{\delta^2}\Big[\psi\Big(\frac{x}{2}\Big)^2 g\Big(\frac{x}{2}\Big)^2-\psi\Big(\frac{y}{2}\Big)^2 g\Big(\frac{y}{2}\Big)^2\Big] \\
&\quad =g(x)^2-g(y)^2.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$g(x+y)g(x-y) = g(x)^2 - g(y)^2, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{3.46}$$

khi đó hàm $g(x)$ là một trong hai hàm sau

$$g(x) = A(x) \tag{3.47}$$

hoặc

$$g(x) = \frac{E(x) - E^*(x)}{2b} \tag{3.48}$$

ở đây $A : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ là hàm cộng tính , $E : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ là hàm exponential, $b \neq 0$ là các hằng số phức.

Từ (3.45) , (3.47) và (3.48) ta có

$$\psi(x) = \delta$$

hoặc

$$\psi(x) = \delta\frac{E(x) + E^*(x)}{2}$$

Suy ra, nghiệm của bài toán trong trường hợp này là

$$\begin{cases} f(x) = \delta\dfrac{E(x) + E^*(x)}{2} \\ g(x) = \beta\dfrac{E(x) - E^*(x)}{2} \end{cases}$$

Kết luận: Nghiệm của bài toán là

$$
\begin{aligned}
&f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } g(x) \text{ hàm tùy ý},\\
&f(x) \text{hàm tùy ý và } g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R},\\
&f(x) = A(x) + \delta \text{ và } g(x) = \beta A(x),\\
&\begin{cases} f(x) = \gamma \dfrac{E(x) - E^*(x)}{2} + \delta \dfrac{E(x) + E^*(x)}{2} \\ g(x) = \beta \dfrac{E(x) - E^*(x)}{2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

trong đó β, δ là các hằng số khác 0, γ là hằng số tùy ý, $E(x)$ là hàm exponential, $A(x)$ là hàm cộng tính.

Nhận xét 3.4. Nếu bổ sung thêm điều kiện hai hàm cần tìm f, g là hai hàm liên tục thì ta được bài toán.

Xác định các hàm $f, g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ liên tục và khác hàm hằng thỏa mãn

$$f(x+y)g(x-y) = f(x)g(x) - f(y)g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Và từ kết quả của bài toán 3.5 ta có nghiệm của bài toán là

$$
\begin{aligned}
&f(x) = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } g(x) \text{ là hàm liên tục tùy ý},\\
&f(x) \text{ là hàm liên tục tùy ý } \ \text{ và } g(x) = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R},\\
&f(x) = k_1 x \text{ và } g(x) = k_2 x,\\
&f(x) = k_3 \sin(ax) + k_4 \cos(ax) \text{ và } g(x) = k_5 \sin(ax),\\
&f(x) = k_6 \sinh(ax) + k_7 \cosh(ax) \text{ và } g(x) = k_8 \sinh(ax),
\end{aligned}
$$

trong đó $k_1, k_2, k_4, k_5, k_7, k_8, a$ là những hằng số khác 0, k_3, k_6 là hằng số tùy ý.

Bài toán 3.6. Chứng minh rằng nếu hàm $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y)f(x-y) \le f(x)^2 - f(y)^2, \ \ x, y \in \mathbb{R} \tag{3.49}$$

thì hàm f là nghiệm của phương trình hàm

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2.$$

Lời giải. Cho $x = y = 0$ thay vào (3.49) ta được $f(0)^2 \le 0$

$$\Rightarrow f(0) = 0.$$

Cho $x = -y$ thay vào (3.49) ta có

$$0 \leq f(-y)^2 - f(y)^2 \Leftrightarrow f(y)^2 \leq f(-y)^2. \tag{3.50}$$

Thay y bằng $-y$ ta có

$$f(-y)^2 \leq f(y)^2 \leq f(-y)^2,$$

suy ra

$$f(-y)^2 = f(y)^2, \ \ \forall y \in \mathbb{R},$$

$$\text{hay } [f(-y) - f(y)][f(-y) + f(y)] = 0, \ \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Giả sử có một vài điểm y_0 sao cho

$$f(y_0) = f(-y_0). \tag{3.51}$$

khi đó, cho $x = 0$ và $y = y_0$ thay vào (3.49) ta có

$$f(y_0)f(-y_0) \leq -f(y_0)^2. \tag{3.52}$$

Từ (3.51) và (3.52), ta có

$$2f(y_0)^2 \leq 0 \Rightarrow f(y_0) = 0 \Rightarrow f(-y_0) = 0. \tag{3.53}$$

Vì vậy ta có

$$f(-y) = -f(y), \ \ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{3.54}$$

Từ (3.49) và (3.54), ta có

$$\begin{aligned} f(y)^2 \leq & f(x)^2 - f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 + f(x+y)f(y-x) \\ \leq & f(x)^2 + f(y)^2 - f(x^2) = f(y)^2. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

3.4 Phương trình hàm sinh bởi hàm tang hyperbolic

Trước hết ta xét một số dạng toán liên quan đến hàm tang.

Bài toán 3.7. Cho $b > 0$. Tìm các hàm $f(x) \neq 0$ xác định và liên tục trong

$$D := \{x + 2bk \mid x \in (-b, b), k \in \mathbb{Z}\}$$

và thỏa mãn các điều kiện

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}, \forall x, y, x+y \in D. \tag{3.55}$$

Lời giải. Cho $y = 0$, từ (3.55) ta có

$$f(0)\big([f(x)]^2 + 1\big) = 0, \forall x \in D$$

nên $f(0) = 0$. Do $f(0) = 0$ và do $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ nên tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $[-x_0, x_0] \subset (-b, b)$ và $|f(x)| < 1, \forall x \in [-x_0, x_0]$.

Chọn $x_1 \in [-x_0, x_0]$ và đặt $f(x_1) = \tan\alpha, \alpha \in \big(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\big)$ khi đó

$$f(2x_1) = \frac{2f(x_1)}{1 - [f(x_1)]^2} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \tan 2\alpha.$$

Giả sử $f(kx_1) = \tan(k\alpha), \forall k = 1, 2, \ldots, m, m \in \mathbb{N}^+$. Khi đó

$$\begin{aligned} f((m+1)x_1) &= \frac{f(mx_1) + f(x_1)}{1 - f(mx_1)f(x_1)} \\ &= \frac{\tan m\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan m\alpha} \\ &= \tan(m+1)\alpha. \end{aligned}$$

Vậy $f(mx_1) = \tan m\alpha, \forall m \in \mathbb{N}^+$.
Thay $y = -x$ vào (3.55) và kết hợp với $f(0) = 0$ ta được $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$. Từ đó suy ra

$$f(mx_1) = \tan m\alpha, \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{3.56}$$

Mặt khác, từ (3.55) ta được

$$f(x_1) = \frac{2f\big(\frac{x_1}{2}\big)}{1 - \big[f\big(\frac{x_1}{2}\big)\big]^2} = \tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \Big[f\Big(\frac{x_1}{2}\Big) - \tan\frac{\alpha}{2}\Big]\Big[1 + f\Big(\frac{x_1}{2}\Big)\tan\frac{\alpha}{2}\Big] = 0. \tag{3.57}$$

Do $\left|\tan\frac{\alpha}{2}\right| < 1$ và $\left|f\Big(\frac{x_1}{2}\Big)\right| < 1$ nên từ (3.57) suy ra

$$f\Big(\frac{x_1}{2}\Big) = \tan\frac{\alpha}{2}.$$

Bằng phương pháp chứng minh quy nạp ta dễ dàng chứng minh được

$$f\Big(\frac{x_1}{2^n}\Big) = \tan\frac{\alpha}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^+. \tag{3.58}$$

Khi đó từ (3.56) và (3.58) suy ra

$$f\Big(\frac{mx_1}{2^n}\Big) = \tan\frac{\alpha}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Kết hợp với giải thiết $f(x)$ là hàm liên tuc trên D, ta có

$$f(xx_1) = \tan(x\alpha), \forall x \in D.$$

Do đó

$$f(x) = \tan ax, a = \frac{\alpha}{x_1}.$$

Để miền xác định của $f(x)$ trùng với D, cần chọn $a = \dfrac{\pi}{2b}$.
Kết luận

$$f(x) = \tan\frac{\pi}{2b}x, \forall x \in D$$

Bài toán 3.8. Tìm các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}, \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.59}$$

Lời giải. Thay $y = 0$ vào (3.59) ta được

$$f(0)\big[1 - (f(x))^2\big] = 0. \tag{3.60}$$

Nếu $f(0) \neq 0$ thì từ (3.60) ta được

$$f \equiv 1, \forall x \in \mathbb{R} \text{ hoặc } f(x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

(do $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$) Thử lại, ta thấy các hàm số trên là các nghiệm của bài toán.

Xét trường hợp $f(0)=0$. Ta chứng minh rằng $|f(x)|<1, \forall x \in \mathbb{R}$.
Thật vậy, giả sử tồn tại $x_1 \neq 0$ để $|f(x_1)| \geq 1$ thì từ (3.59) suy ra các bất đẳng thức sau

$$|f(x_1)| = \frac{2\left|f\left(\frac{x_1}{2}\right)\right|}{1+\left[f\left(\frac{x_1}{2}\right)\right]^2} \geq 1$$

$$1+\left[f\left(\frac{x_1}{2}\right)\right]^2 \leq 2\left|f\left(\frac{x_1}{2}\right)\right|.$$

Do đó

$$\left|f\left(\frac{x_1}{2}\right)\right| = 1.$$

Lập luận bằng phương pháp quy nạp, ta có

$$\left|f\left(\frac{x_1}{2^n}\right)\right| = 1, \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Từ tính liên tục của $f(x)$, suy ra $|f(0)| = 1$. Điều này trái với giả thiết $f(0) = 0$.
Vậy $|f(x)| < 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
Với $x_1 \neq 0$ đặt $f(x_1) = \tanh \alpha$. Khi đó

$$f(2x_1) = \frac{2f(x_1)}{1+[f(x_1)]^2} = \frac{2\tanh\alpha}{1+\tanh^2\alpha} = 2\tanh 2\alpha.$$

Giả sử $f(kx_1) = \tanh(k\alpha), \forall k = 1, 2, \ldots, m; m \in \mathbb{N}^+$. Khi đó

$$f((m+1)x_1) = \frac{f(mx_1)+f(x_1)}{1-f(mx_1).f(x_1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tanh m\alpha + \tanh\alpha}{1+\tanh\alpha.\tanh m\alpha} = \tanh(m+1)\alpha.$$

Vậy $f(mx_1) = \tanh m\alpha, \forall m \in \mathbb{N}^+$. Thay $y=-x$ vào (3.59) và sử dụng $f(0)=0$ ta được $f(-x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Từ đó suy ra

$$f(mx_1) = \tanh\alpha, \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{3.61}$$

Mặt khác, cũng từ (3.59) ta được

$$f(x_1) = \frac{2f\left(\frac{x_1}{2}\right)}{1+\left[f\left(\frac{x_1}{2}\right)\right]^2} = \tanh\alpha = \frac{2\tanh\frac{\alpha}{2}}{1+\tanh^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \big[f\big(\frac{x_1}{2}\big) - \tanh\frac{\alpha}{2}\big]\big[1 - f\big(\frac{x_1}{2}\big)\tanh\frac{\alpha}{2}\big] = 0. \tag{3.62}$$

Do $\left|\tanh\dfrac{\alpha}{2}\right| < 1$ và $\left|\tanh\dfrac{x_1}{2}\right| < 1$ nên

$$(3.62) \Leftrightarrow f\big(\frac{x_1}{2}\big) = \tanh\frac{\alpha}{2}.$$

Bằng phương pháp chứng minh quy nạp, dễ dàng chứng minh đẳng thức

$$f\big(\frac{x_1}{2^n}\big) = \tanh\frac{\alpha}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^+. \tag{3.63}$$

Từ (3.61) và (3.63) suy ra

$$f\big(\frac{mx_1}{2^n}\big) = \tanh\frac{m\alpha}{2^n}, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^+$$

theo giả thiết $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và do $\tanh x$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra

$$f(xx_1) = \tanh(x\alpha).$$

Vậy

$$f(x) = \tanh ax, a = \frac{\alpha}{x_1}.$$

Thử lại, ta được

$$\begin{aligned} &f \equiv 1,\\ &f \equiv -1,\\ &f(x) = \tanh ax, a \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Kết luận

Luận văn "Đẳng thức và bất đẳng thức trong lớp hàm hyperbolic" đã giải quyết được những vấn đề sau:

1. Luận văn đã trình bày chi tiết một số kiến thức liên quan đến hàm lượng giác hyperbolic, các hằng đẳng thức cơ bản giữa các lớp hàm hyperbolic.

2. Tiếp theo, xét một số lớp bài toán áp dụng liên quan tới lớp hàm hyperbolic.

3. Cuối cùng, luận văn trình bày về phương trình hàm sinh bởi các hàm lượng giác hyperbolic và một số bài toán áp dụng tương ứng.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Nguyễn Văn Mậu (1993), *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình*, NXB Giáo dục.

[2] Nguyễn Văn Mậu (1998), *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ,* NXB Giáo dục.

[3] Nguyễn Văn Mậu (2006), *Bất đẳng thức. Định lý và áp dụng,* NXB Giáo dục.

[4] Nguyễn Văn Mậu, Phạm Thị Bạch Ngọc (2002), *Một số bài toán chọn lọc từ lượng giác*, NXB Giáo dục.

[5] Nguyễn Văn Mậu (2010), *Số phức và áp dụng*, NXB Giáo dục.

[6] *Các bài thi Olympic Toán trung học phổ thông Việt Nam (1990-2006),* NXB Giáo dục.

Tiếng Anh

[7] Morse P.M., Erdeleyi A., Gray M.C., (1970) *Handbook of Mathematical Functions*, Springer.