

Tên đề tài

MỘT SỐ ỨNG DỤNG TOÁN HỌC TRONG VẬT LÝ.

A. ĐẶT VẤN ĐỀ CHUNG:

-Vật lý là môn khoa học thực nghiệm, các định luật, công thức vật lý được xây dựng trên biểu thức toán học phù hợp với kết quả thực nghiệm.

-Để xác định các đại lượng vật lý, giải thích sự thay đổi các đại lượng vật lý, giải thích các hiện tượng vật lý nhất thiết phải dùng các công thức toán học như các hàm số sơ cấp, hàm siêu việt, phép tính đạo hàm, tích phân ...

-Việc sử dụng toán học có ý nghĩa và hiệu quả vào bài toán vật lý vẫn là chuyện khó đối với học sinh phổ thông và giáo viên mới ra trường. Làm thế nào để học sinh hiểu phương pháp sử dụng để giải quyết vấn đề quen thuộc, tiết kiệm được thời gian và vận dụng linh hoạt vào bài toán lạ.

-Sau đây chỉ là một số phương pháp đơn giản để giải quyết 1 phần của vấn đề khó mà các em học sinh được bồi dưỡng để ôn tập trong các kỳ thi học kỳ, tốt nghiệp, đại học, học sinh giỏi ...

B. GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG:

Bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một đại lượng vật lý khi có một đại lượng vật lý khác thay đổi... khảo sát sự biến thiên của chúng thường gặp ở bài toán điện 1 chiều và xoay chiều.

1. Các phương pháp thực hiện:

+Chọn đối số và lập luận hàm số $y=f(x)$

+Dùng 1 trong các phương pháp sau đây để giải

a. Phương pháp 1: Dùng bất đẳng thức Côsi:

Nội dung:

+Áp dụng cho 2 số dương a,b

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)_{\min} = \sqrt{ab} \\ (\sqrt{ab})_{\max} = \frac{a+b}{2} \end{cases} \text{ dấu "=" xảy ra khi } a=b$$

+Áp dụng cho n số hạng

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \text{ dấu bất đẳng thức xảy ra khi } a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

b. Phương pháp 2:

+Dùng định lý hàm số sin trong tam giác: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

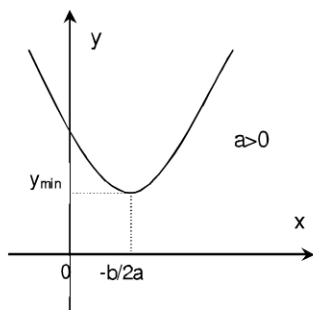
+Định lý hàm số cosin trong tam giác: $a^2 = b^2 + c^2 + 2.b.c.\cos \bar{b}.\bar{c}$

c. Phương pháp 3: Dựa vào hàm số bậc 2: $y=f(x)=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$)

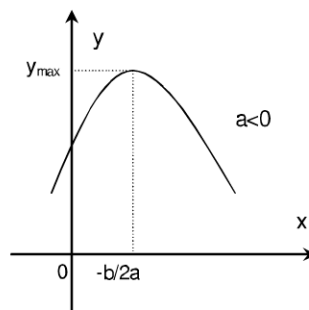
$$+a>0 \text{ thì } y_{\min} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{4ac-b^2}{4a} \text{ khi } x = \frac{-b}{2a}$$

$$+a<0 \text{ thì } y_{\max} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{4ac-b^2}{4a} \text{ khi } x = \frac{-b}{2a}$$

+Đồ thị:



Trang 1



d. Phương pháp 4: Dùng đạo hàm.

Nội dung: +Hàm số $y=f(x)$ có cực trị khi $f'(x)=0$
 +Giải phương trình $f'(x) = 0$
 +Lập bảng biến thiên tìm cực trị.
 +Vẽ đồ thị nếu đề bài yêu cầu khảo sát sự biến thiên.

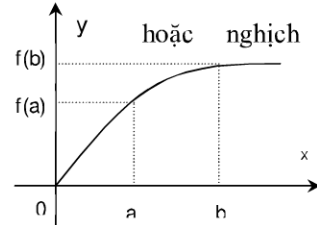
e. Ngoài các phương pháp trên còn có một số phương pháp khác để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một đại lượng vật lý. Tùy theo biểu thức của đại lượng vật lý có dạng hàm số nào mà áp dụng bài toán để giải.

Ví dụ: Có những hàm số không có cực trị, chỉ có tính đồng biến hoặc nghịch biến ta tìm được giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong miền nào đó.

Trong đoạn: $[a, b]$

$f(b)$ lớn nhất khi $x=b$

$f(a)$ nhỏ nhất khi $x=a$.



Sau đây là một số bài toán tiêu biểu áp dụng cho phương pháp 1.

2. Vấn đề 1:

Bài toán 1: Cho 2 điện tích điểm cùng dấu (điện tích dương) $q_1 = q_2 = q$ đặt tại hai điểm A và B cách nhau $2R$.

a. Xác định cường độ điện trường tổng hợp tại M nằm trên đường trung trực và cách AB một đoạn x .

b. Định vị trí M để E_M cực đại, cực tiểu.

Cách làm:

a. Xác định E_M : Cường độ điện trường tổng hợp tại M do hai điện tích gây ra.

$$\vec{E}_M = \vec{E}_A + \vec{E}_B$$

$$\text{Độ lớn: } E_A = E_B = \frac{k \cdot q}{AM^2} = \frac{k \cdot q}{R^2 + x^2} \quad (\text{với } AM^2 = \sqrt{R^2 + x^2})$$

$$V_1 \begin{cases} \vec{E}_A, \vec{E}_B = 2\alpha \\ E_A = E_B \end{cases}$$

$$E_M = 2 \cdot E_A \cdot \cos \alpha$$

Trong tam giác vuông AOM:

$$\cos \alpha = \frac{x}{AM} = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \quad \text{thay vào } E_M = \frac{2k \cdot q \cdot x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

b. Định vị trí M để E_M cực đại:

$$\text{Đặt } y = \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E_M = 2kq \cdot y \quad E_M \text{ cực đại khi } y_{\max}.$$

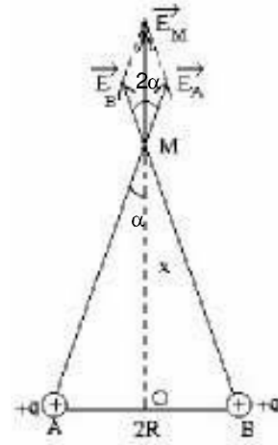
Dùng bất đẳng thức côsi để tìm y_{\max} như sau:

$$+ \text{Tách } R^2 + x^2 \text{ thành 3 số không âm: } \frac{R^2}{2}, \frac{R^2}{2}, x^2.$$

$$\frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} + x^2 \geq 3 \sqrt[3]{\frac{R^2}{2} \cdot \frac{R^2}{2} \cdot x^2}$$

$$\text{Lũy thừa 3 hai vế: } \left(\frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} + x^2 \right)^3 \geq 27 \left(\frac{R^2}{2} \cdot \frac{R^2}{2} \cdot x^2 \right)$$

$$\text{Lấy căn bậc hai 2 vế: } \left(\frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} + x^2 \right)^{3/2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot R^2 \cdot x$$



Chuyển về: $\frac{2}{3\sqrt{3}.R^2} \geq \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = y$

$$y \leq \frac{2}{3\sqrt{3}R^2}$$

$$y_{\min} = \frac{2}{3\sqrt{3}.R^2} \quad \text{khi} \quad \frac{R^2}{2} = x^2$$

$$x = \pm \frac{R}{2} \quad (\text{có 2 điểm M nằm đối xứng nhau qua O}) \text{ tam giác AMB vuông cân tại M}$$

thay vào: $(E_M)_{\max} = \frac{4.kq}{3\sqrt{3}R^2}$

Định vị trí M để E_M cực tiểu

Nhìn vào biểu thức E_M ta thấy $(E_M)_{\min} = 0$ khi $x=0$, lúc này M trùng O

↳ Nhận xét 1: Qua một bài toán trên nếu tại M ta đặt điện tích thử q_0 . Tìm vị trí M để lực tĩnh điện tác dụng lên q_0 cực đại cực tiểu thì cách làm cũng tương tự áp dụng cho biểu thức lực tổng hợp tại M.

$F_M = q_0 . E_M$. Biểu thức cho thấy $(E_M)_{\max}$ thì $(F_M)_{\max}$

↳ Nhận xét 2: Nếu ta cho điện tích q quay $\frac{1}{2}$ vòng tròn đường kính 2R

bài toán trở thành xác định \vec{E}_M tại M do vòng dây dẫn mảnh có đường kính 2R mang điện tích dương + Q gây ra.

Cách làm: ta thay 2 điện tích điểm thành Δq nằm đối xứng xuyên tâm tính

$$\Delta \vec{E}_M = \Delta \vec{E}_A + \Delta \vec{E}_B$$

$$\Delta E_M = 2\Delta E_A \cdot \cos \alpha = \frac{k.2\Delta q.x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

Cường độ điện trường tổng hợp của cả vòng dây gây ra tại M.

$$\vec{E}_M = \sum \Delta \vec{E}_M$$

Độ

$$E_M = \sum \Delta E_M = \sum \frac{k.x.2\Delta q}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{kx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \sum 2\Delta q$$

$$\sum 2\Delta q = Q$$

$$E_M = \frac{k.x.Q}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

Việc đi tìm $(E_M)_{\max}$, $(E_M)_{\min}$ giống như trên.

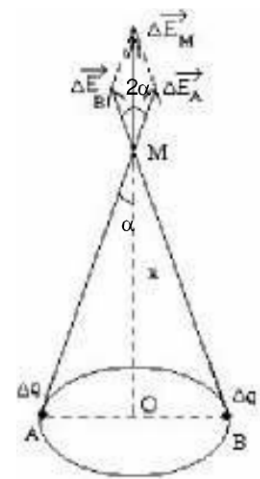
Hình vẽ chỉ cần thay bằng vectơ $\Delta \vec{E}_A$, $\Delta \vec{E}_B$, $\Delta \vec{E}_M$

↳ Nhận xét 3: không áp dụng được cho điện thế tại M do 2 điện tích điểm gây ra hoặc vòng dây gây ra vì điện thế là đại lượng vô hướng. Áp dụng được cho cảm ứng từ \vec{B} của dòng điện. Từ hình vẽ nếu ta xem hai điện tích dương tại A và B là 2 dòng điện cùng chiều, cùng độ lớn chạy trong hai dây dẫn song song M là điểm nằm trong mặt phẳng vuông góc hai dây dẫn nằm trên đường trung trực AB cách AB một đoạn x.

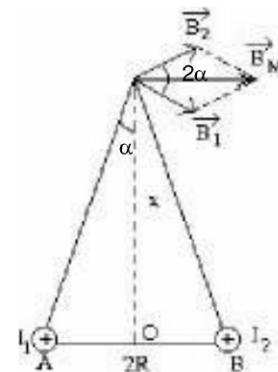
Cảm ứng từ tổng hợp tại M.

$$\vec{B}_M = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

$$B_1 = B_2 = 2.10^{-7} \cdot \frac{I}{AM} = 2.10^{-7} \cdot \frac{I}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$



lớn:



$$\begin{cases} B_1 = B_2 \\ \overline{B_1 B_2} = 2\alpha \end{cases} \quad \alpha$$

$$B_M = 2B_1 \cdot \cos \alpha = 4 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I \cdot x}{R^2 + x^2} = \frac{4 \cdot 10^{-7} \cdot I}{\frac{R^2}{x} + x} \quad (\text{với } \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}})$$

Tìm $(B_M)_{\max}$, $(B_M)_{\min}$ ở biểu thức này đơn giản hơn.

3. Vấn đề 2:

Tìm giá trị lớn nhất của hàm công suất P theo biến trở R . Phương pháp thường dùng là bất đẳng thức Côsi hay hàm số bậc 2 phù hợp cho học sinh khối 11.

Bài toán 2: Cho mạch điện hình vẽ. Nguồn điện có ε , r mạch điện ngoài R_1 và biến trở x thay đổi được.

a. Tính x để công suất tiêu thụ mạch ngoài cực đại.

Tính P_{\max} .

b. Tính x để công suất tiêu thụ trên biến trở x cực đại.

Tính $P_{x\max}$.

Giải:

a. Tính x để P_{\max} :

Công suất tiêu thụ mạch ngoài $P = (R + x) I^2$.

$$\text{Mà } I = \frac{\varepsilon}{R + x + r}$$

$$P = \frac{(R + x) \cdot \varepsilon^2}{(R + x + r)^2} \quad (1)$$

$$\text{Chia tử và mẫu cho } R + x: \quad P = \frac{\varepsilon^2}{\left(\sqrt{R + x} + \frac{r}{\sqrt{R + x}}\right)^2}$$

Vì tử số của P là hằng số, P_{\max} khi mẫu cực tiểu. Theo bất đẳng thức Côsi:

$$\sqrt{R + x} + \frac{r}{\sqrt{R + x}} \geq r$$

$$\left(\sqrt{R + x} + \frac{r}{\sqrt{R + x}}\right)_{\min} = r \Rightarrow \sqrt{R + x} = \frac{r}{\sqrt{R + x}}$$

$$\Leftrightarrow R + x = r \Rightarrow x = r - R$$

$$\text{Thay } x \text{ vào (1): } P_{\max} = \frac{\varepsilon^2}{4r}$$

b. Tính x để $P_{x\max}$:

$$\text{Công suất tiêu thụ trên } x: \quad P_x = x \cdot I^2 = \frac{x \cdot \varepsilon^2}{(R + x + r)^2}$$

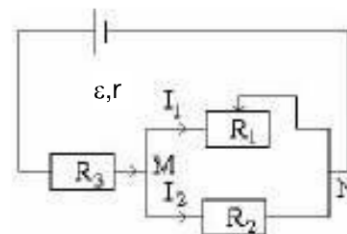
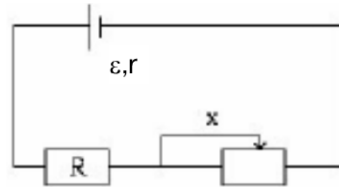
$$P_x = \frac{\varepsilon^2}{\left(\sqrt{x} + \frac{R + r}{\sqrt{x}}\right)^2} \quad (2)$$

$$\text{Lý luận tương tự: } P_{x\max} \text{ khi } \sqrt{x} = \frac{R + r}{\sqrt{x}}$$

$$x = R + r$$

$$\text{Thay vào (2): } P_{x\max} = \frac{\varepsilon^2}{4(R + r)}$$

Bài toán 3: Cho mạch điện hình vẽ:



$\varepsilon = 16V$; $r = 4\Omega$; $R_2 = 6\Omega$; $R_3 = 2\Omega$. Tìm điện trở của biến trở R_1 để:

- Công suất mạch ngoài cực đại.
- Công suất tiêu thụ ở R_3 cực đại.
- Công suất tiêu thụ ở R_2 cực đại.
- Công suất tiêu thụ ở R_1 cực đại.

Cách làm:

a. Tính R_1 để P_{\max} :

Công suất tiêu thụ mạch ngoài.

$$P = R_{td} \cdot I^2 \text{ với } R_{td} = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$P = \frac{R_{td} \cdot \varepsilon^2}{(R_{td} + r)^2} = \frac{\varepsilon^2}{(\sqrt{R_{td}} + \frac{r}{\sqrt{R_{td}}})^2}$$

Mẫu số có hai tích số không đổi. Theo bất đẳng thức Côsi tổng nhỏ nhất khi

$$\sqrt{R_{td}} = \frac{r}{\sqrt{R_{td}}} \Rightarrow R_{td} = r \Leftrightarrow R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = r$$

Giải ra $R_1 = 3\Omega$

$$P_{\max} = \frac{\varepsilon^2}{4r} = 16W$$

b. Công suất tiêu thụ trên R_3 cực đại:

$$P_3 = R_3 \cdot I^2 = \frac{R_3 \varepsilon^2}{(R_3 + R_{12} + r)^2}$$

$$P_{3\max} \text{ khi } R_{12} = 0 \Leftrightarrow \frac{6R_1}{R_1 + 6} = 0 \Rightarrow R_1 = 0$$

$$P_{3\max} = \frac{R_3 \varepsilon^2}{(R_3 + r)^2} = 14,2 \text{ w}$$

c. Công suất tiêu thụ trên R_2 cực đại:

$$P_2 = R_2 I_2^2 \text{ mà } I_2 = \frac{U_{MN}}{R_2} \quad P_2 = \frac{U_{MN}^2}{R_2}$$

$$U_{MN} = I \cdot R_{12} = \frac{\varepsilon}{R_3 + R_{12} + r} \cdot R_{12} = \frac{\varepsilon}{\frac{R_3}{R_{12}} + 1 + \frac{r}{R_{12}}} \quad \text{với } R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$P_2 = \frac{\varepsilon^2}{R_2 \left[\frac{R_3}{R_{12}} + 1 + \frac{r}{R_{12}} \right]^2}$$

Để $P_{2\max}$ thì $R_{12} = \infty \Rightarrow R_1 = \infty$

$$P_2 = \frac{\varepsilon^2}{R_2} = 42,6 \text{ w}$$

d. Công suất tiêu thụ trên R_1 cực đại:

$$P_1 = R_1 I_1^2 = R_1 \frac{U_{MN}^2}{R_1^2} = \frac{U_{MN}^2}{R_1}$$

$$+ I = \frac{\varepsilon}{R_3 + R_{12}} \text{ với } R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6R_1}{R_1 + 6}$$

$$+ I = \frac{16}{2 + \frac{6R_1}{R_1 + 6}} = \frac{16(R_1 + 6)}{8R_1 + 12} = \frac{4(R_1 + 6)}{2R_1 + 3}$$

$$+ U_{MN} = I \cdot R_{12} = \frac{4(R_1 + 6)}{(2R_1 + 3)} \cdot \frac{6R_1}{(R_1 + 6)} = \frac{24R_1}{2R_1 + 3}$$

$$P_1 = \frac{1}{R_1} \cdot \left(\frac{24R_1}{2R_1 + 3} \right)^2 = \frac{24^2 R_1}{(2R_1 + 3)^2} = \frac{24^2}{(2\sqrt{R_1} + \frac{3}{\sqrt{R_1}})^2}$$

Dùng côsi mẫu số: $P_{1\max}$ khi $R_1 = 1,5\Omega$

$$P_{1\max} = \frac{24^2}{4R_1} = \frac{24^2}{6} = 96\text{w}$$

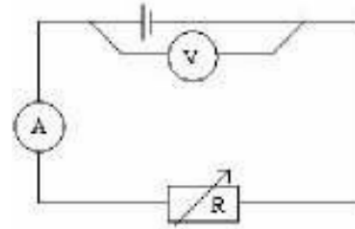
➤ **Nhận xét:** + Ở câu (a) và câu (d) mẫu số là tổng hai số có tích số không đổi nên áp dụng bất đẳng thức côsi được.

+ Ở câu (b) và (c) mẫu số là hàm số không có cực trị (tích hai số thay đổi) không dùng bất đẳng thức côsi được.

+ Nếu đề tài đòi hỏi khảo sát sự phụ thuộc của một đại lượng vật lý vào một đại lượng khác ta dùng đồ thị diễn tả.

Bài toán 4: Cho mạch điện hình vẽ. Khảo sát sự phụ thuộc các đại lượng sau đây vào biến trở mạch ngoài mắc kín với nguồn điện.

- Cường độ dòng điện trong mạch (số chỉ A)
- Hiệu điện thế ở 2 cực nguồn điện (số chỉ V)
- Công suất tiêu thụ mạch ngoài.
- Công suất của nguồn điện.
- Hiệu suất của nguồn điện.



Cách làm:

Lập các biểu thức là hàm số theo biến R

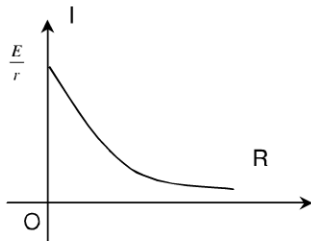
a. $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$ có dạng $f(x) = \frac{a}{x + b}$ hình 1

b. $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$ có dạng $f(x) = \frac{ax}{x + b}$ hình 2

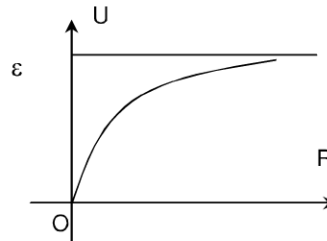
c. $P = R \cdot I^2 = \frac{R\varepsilon^2}{(R + r)^2}$ có dạng $f(x) = \frac{ax}{(x + b)^2}$ hình 3

d. $P_\varepsilon = \varepsilon I = \frac{\varepsilon^2}{R + r}$ có dạng $f(x) = \frac{a}{x + b}$ hình 4

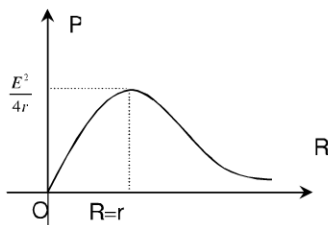
e. $H = \frac{P}{P_\varepsilon} = \frac{R}{R + r}$ có dạng $f(x) = \frac{x}{x + b}$ hình 5



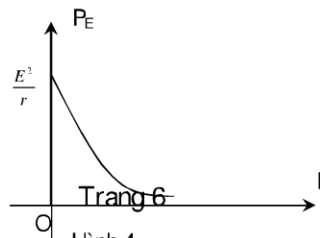
Hình 1



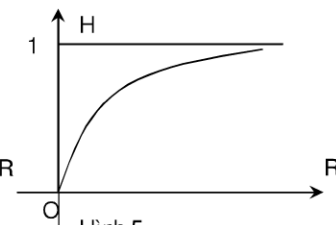
Hình 2



Hình 3



Hình 4



Hình 5

➤ **Nhận xét:** Để vẽ đồ thị của hàm sơ cấp đơn giản có tính liên tục không bị gián đoạn đối với giá trị dương của biến trở R ta chọn 2 trong 3 giá trị R .

+Chọn $R=0$ cho điểm đầu (tìm giới hạn $R \rightarrow 0$)

+Chọn $R=\infty$ cho điểm cuối (tìm $\lim_{R \rightarrow \infty} f(x)$)

+Nếu hàm có cực trị ta tìm cực trị chọn giá trị R nằm ở phần giữa. Đồ thị hàm số qua giá trị này tăng hoặc giảm. Cụ thể hàm số đang tăng qua giá trị R này đạt cực đại, tiếp tục tăng R thì hàm số không tăng nữa mà giảm. Ngược lại hàm số đang giảm qua giá trị R này đạt cực tiểu, tiếp tục tăng R hàm số không giảm nữa mà tăng lên.

Bài toán 5:

Khảo sát sự phụ thuộc của đại lượng sau vào cường độ dòng điện trong mạch kín.

a. Hiệu điện thế ở hai cực của nguồn điện.

b. Công suất tiêu thụ mạch ngoài.

c. Công suất của nguồn điện.

d. hiệu suất của nguồn điện.

Trong thực tế thay đổi I bằng cách thay đổi biến trở R .

Cách làm: Lập các biểu thức là hàm số theo biến I .

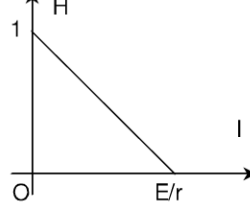
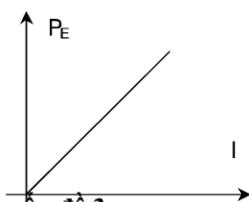
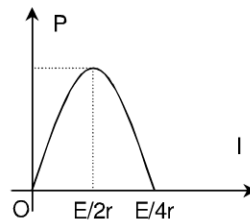
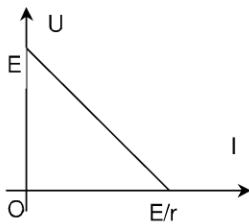
a. $U = E - rI$ có dạng $f(x) = b - ax$.

b. $P = EI - rI^2$ có dạng $f(x) = bx - ax^2$.

c. $P_E = EI$ có dạng $f(x) = ax$.

d. $H = \frac{P}{P_E} = 1 - \frac{rI}{E}$ có dạng $f(x) = 1 - ax$.

Đồ thị có dạng như sau:



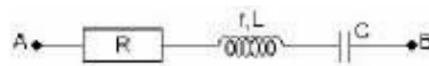
4. Ôn đề 3:

Ở lớp 12 bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một đại lượng vật lý như số chỉ (A, V, W) thay đổi thế nào khi một đại lượng vật lý khác như R, L, C, W thay đổi: học sinh cơ nhiều kết thức toán để giải, như dùng đạo hàm để tìm cực trị hàm số. Tuy nhiên phương pháp 1 và 3 vẫn được dùng nhiều hơn vì nó đơn giản. Tóm lại tùy theo dạng bài toán mà dùng phương pháp nào có lợi hơn, dễ nhớ hơn. Sau đây là một số bài tập minh họa điều này.

Bài toán 6: Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ:

1. Thay đổi L hoặc C hoặc W để công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AB cực đại

Cách làm: Công suất tiêu thụ trên mạch



$$P = (R+r)I^2 = \frac{(R+r).U^2}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}$$

Các đại lượng thay đổi đều nằm trong số hạng: $(Z_L - Z_C)^2$

Để P_{\max} thì hiệu $Z_L - Z_C = 0$, mạch có cộng hưởng điện

$LC\omega^2 = 1 \Rightarrow$ Tính L hoặc C hoặc ω

$$P_{\max} = \frac{U^2}{R+r}$$

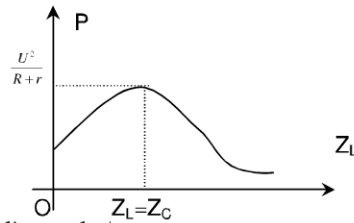
Nếu đề bài đòi hỏi khảo sát sự biến thiên thì ta lập thêm bảng biến thiên để vẽ đồ thị cụ thể như sau:

a. P thay đổi theo L. ta khảo sát P theo Z_L và để ý $Z_L = L\omega$ giữa Z_L và L quan hệ đồng biến.

Bảng biến thiên:

| | | | |
|-------|-------------------------------------|-------------------|----------|
| Z_L | 0 | $Z_L = Z_C$ | ∞ |
| P | $\frac{(R+r).U^2}{(R+r)^2 + Z_C^2}$ | $\frac{U^2}{R+r}$ | 0 |

Đồ thị:



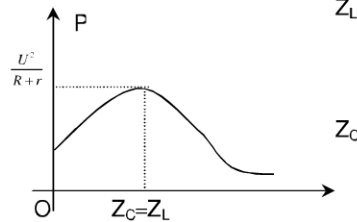
Đồ thị có tiệm cận ngang là $y = 0$

b. Thay đổi theo C. Ta khảo sát P theo Z_C và để ý $Z_C = \frac{1}{C\omega}$ giữa Z_C và C quan hệ nghịch biến.

Bảng biến thiên:

| | | | |
|-------|-------------------------------------|-------------------|----------|
| Z_C | 0 | $Z_C = Z_L$ | ∞ |
| P | $\frac{(R+r).U^2}{(R+r)^2 + Z_L^2}$ | $\frac{U^2}{R+r}$ | 0 |

Đồ thị:

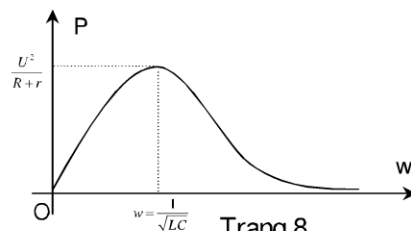


c. P thay đổi theo ω (hoặc f)

Bảng biến thiên:

| | | | |
|----------|---|--------------------------------|-------------------------|
| ω | 0 | $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ | ∞ |
| P | 0 | $\frac{U^2}{R+r}$ | $\frac{(R+r).U^2.C}{L}$ |

Đồ thị:



↪ Nhận xét: thay đổi L hoặc C hoặc w để công suất tiêu thụ trên R cực đại, công suất tiêu thụ trên cuộn dây cực đại.

Công suất tiêu thụ trên R

$$P_R = R.I^2 = \frac{R.U^2}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}$$

Công suất tiêu thụ trên cuộn dây

$$P_R = r.I^2 = \frac{r.U^2}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}$$

Hai biểu thức P_R và P_r có dạng giống biểu thức P nên cùng 1 cách làm và dáng điệu của đồ thị như nhau.

2. Bây giờ ta thay đổi R để

- Công suất tiêu thụ trên mạch AB cực đại.
- Công suất tiêu thụ trên R cực đại.
- Công suất tiêu thụ trên cuộn dây cực đại.

Cách làm:

a. Tính R để P_{\max}

$$P = \frac{(R+r).U^2}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2} \text{ chia tử và mẫu cho } R+r$$

$$P = \frac{U^2}{(R+r) + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R+r}}$$

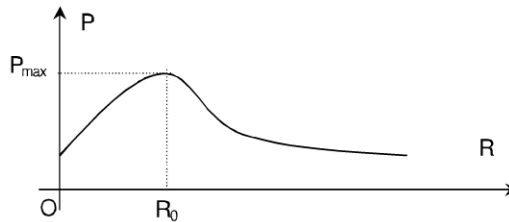
$$\text{Dùng Côsi mẫu số: } P_{\max} = \frac{U^2}{2(R+r)} \text{ khi } R+r = |Z_L - Z_C|$$

$$R_0 = R = |Z_L - Z_C| - r$$

Khảo sát sự biến thiên của P theo R

| | | | |
|---|-------------------------------------|-------------------------|----------|
| R | 0 | $R_0 = Z_L - Z_C - r$ | ∞ |
| P | $\frac{r.U^2}{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}$ | $\frac{U^2}{2(R+r)}$ | 0 |

Đồ thị:



b. Tính R để $P_{R\max}$:

$$P_R = R.I^2 = \frac{R.U^2}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2} \text{ khai triển mẫu rồi chia tử và mẫu cho } R$$

$$P_R = R.I^2 = \frac{R.U^2}{R^2 + 2Rr + r^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \frac{U^2}{R + \frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}{R} + 2r}$$

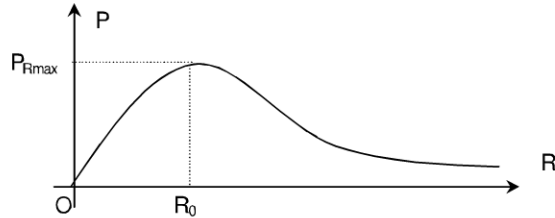
Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho mẫu số:

$$P_{R\max} = \frac{U^2}{2(R+r)} \text{ khi } R_0 = R = \sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}$$

Khảo sát P_R theo R

| | | | |
|-------|---|------------|----------|
| R | 0 | R_0 | ∞ |
| P_R | 0 | P_{Rmax} | 0 |

Đồ thị:



c. Tính R để P_{Rmax} :

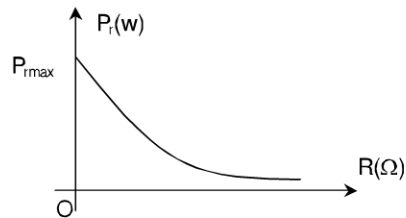
$$P_r = r.I^2 = \frac{r.U^2}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}$$

$$P_{rmax} = \frac{r.U^2}{r^2 + (Z_L - Z_C)^2} \text{ khi } R=0$$

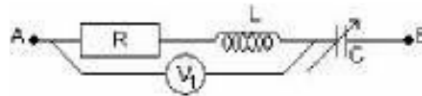
Khảo sát P_r theo R

| | | |
|-------|-------------------------------------|----------|
| R | 0 | ∞ |
| P_r | $\frac{r.U^2}{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}$ | 0 |

Đồ thị:



Bài toán 7: Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ
Thay đổi C để số chỉ V_1 cực đại. Khảo sát số chỉ V_1 khi C thay đổi.



$$\text{Số chỉ } V_1 \text{ chỉ } U_1 = I \cdot Z_1 \quad U_1 = \frac{U \sqrt{R^2 + Z_L^2}}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$$

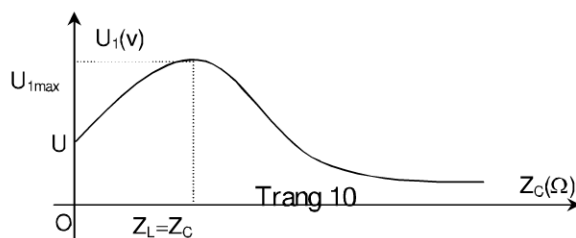
$$U_{1max} = \frac{U \sqrt{R^2 + Z_L^2}}{R} \text{ khi } Z_L - Z_C = 0; C = \frac{1}{L\omega^2}$$

Ta khảo sát U_1 theo Z_C và để ý $Z_C = \frac{1}{C\omega}$ Z_C và C nghịch biến.

Bảng biến thiên:

| | | | |
|-------|-----|----------------------------------|----------|
| Z_C | 0 | $Z_C = Z_L$ | ∞ |
| U_1 | U | $\frac{U \sqrt{R^2 + Z_L^2}}{R}$ | 0 |

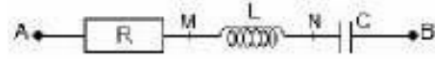
Đồ thị:



➤ Nhận xét: đại lượng biến thiên C hoặc L nằm ngoài số chỉ vôn kế đều rơi vào trường hợp công hưởng.

Nếu đại lượng biến thiên L hoặc C hoặc w nằm trong số chỉ vôn kế bài toán trở nên phức tạp hơn. Bài toán sau đây minh họa điều này.

Bài toán 8: Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ



1. Thay đổi R để U_R cực đại.
2. Thay đổi L để U_L cực đại.
3. Thay đổi C để U_C cực đại.
4. Thay đổi w lần lượt để U_R cực đại, U_L cực đại, U_C cực đại.

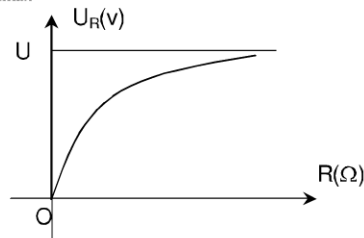
Các làm:

1. Trường hợp câu 1: $U_R = I \cdot R = \frac{U \cdot R}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$

$$U_R = \frac{U}{\sqrt{1 + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R^2}}}$$

$$U_{R\max} = U \text{ khi } R = \infty$$

Đồ thị:



2. Định L để U_L cực đại:

Cách 1: $U_L = I \cdot Z_L = \frac{U \cdot Z_L}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \frac{U \cdot Z_L}{\sqrt{R^2 + Z_L^2 - 2Z_L Z_C + Z_C^2}}$

Chia tử và mẫu cho Z_L và thu gọn: $U_L = \frac{U}{\sqrt{(R^2 + Z_C^2) \frac{1}{Z_L^2} - \frac{2Z_C}{Z_L} + 1}}$

Đặt $x = \frac{1}{Z_L}$

Hàm $y = ax^2 + bx + 1$ với $\begin{cases} a = R^2 + Z_C^2 \\ b = -2Z_C \end{cases}$ $U_L = \frac{U}{\sqrt{y}}$

Để $U_{L\max}$ thì y_{\min}

Vì $a > 0$ nên $y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$

Thay a, b vào: $\frac{1}{Z_L} = \frac{2Z_C}{2(R^2 + Z_C^2)}$

$$+Z_L = \frac{R^2 + Z_C^2}{Z_C} \Rightarrow L$$

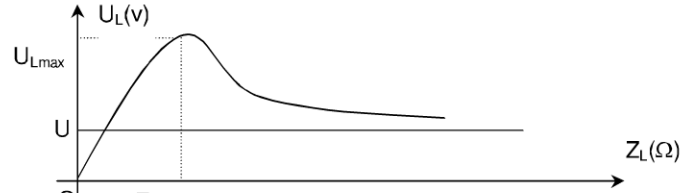
$$+y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{R^2}{R^2 + Z_C^2} \Rightarrow U_{L\max} = \frac{U \sqrt{R^2 + Z_C^2}}{R}$$

Bảng biến thiên:

| | | | |
|-------|---|---|----------|
| Z_L | 0 | | ∞ |
| | | ↗ | ↘ |

$$U_L \quad 0 \quad \frac{U\sqrt{R^2 + Z_C^2}}{R} \quad U$$

Đồ thị:



Cách 2: dùng giản đồ vector $Z_L = Z_C$ vào phép tính hình học:

$$u_{AB} = u_{AM} + u_{MN} + u_{NB}$$

$$\text{Dạng vector: } \overline{U_{AB}} = \overline{U_{AM}} + \overline{U_{MN}} + \overline{U_{NB}}$$

$$\overline{U} = \overline{U_R} + \overline{U_L} + \overline{U_C}$$

Vẽ giản đồ theo cách nối tiếp vector:

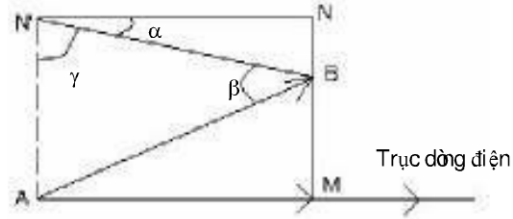
$$AB = U_{AB} = U$$

$$AM = U_R$$

$$MN = AN' = U_L$$

$$NB = U_C$$

Kẻ AN' song song MN và bằng MN để tạo thành tam giác ABN'



$$\text{Dùng định lý hàm số sin: } \frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{AN'}{\sin \beta} \Leftrightarrow \frac{U}{\sin \gamma} = \frac{U_L}{\sin \beta}$$

$$U_L = \frac{U \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$\text{Khi } L \text{ thay đổi góc } \alpha \text{ không đổi với } \tan \alpha = \frac{NB}{N'N} = \frac{Z_C}{R}$$

$$\sin \gamma = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + Z_C^2}}$$

Còn góc β thay đổi

$$U_{L\max} = \frac{U}{\sin \gamma} \text{ khi } \sin \beta = 1 \rightarrow \beta = 90^\circ \text{ tam giác } ABN' \text{ vuông tại } B$$

$$U_{L\max} = \frac{U\sqrt{R^2 + Z_C^2}}{R} \text{ lúc này góc } BAM = \gamma$$

$$\tan \gamma = \frac{MB}{AM} = \frac{Z_L - Z_C}{R} \Leftrightarrow \cot \alpha = \frac{Z_L - Z_C}{R}$$

$$\frac{R}{Z_C} = \frac{Z_L - Z_C}{R} \Rightarrow Z_L = \frac{R^2 + Z_C^2}{Z_C}$$

Cách 3: dùng đạo hàm để tìm cực trị có tính tổng quát cho mọi bài toán

✧ Nhận xét: Ở cách 2 và 3 phức tạp và công phu nên dùng kiến thức toán đơn giản như cách 1

+Đối với mạch xoay chiều phức tạp phương pháp hình học ở cách 2 có lợi hơn.

3. Định C để U_C cực đại:

$$U_C = I \cdot Z_C = \frac{UZ_C}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$$

Dùng cách 1 giải như câu 2 chỉ cần thay đổi đại lượng $Z_C = Z_L$ được kết quả.

$$U_{C\max} = \frac{U \cdot \sqrt{R^2 + Z_L^2}}{R} \text{ khi } Z_C = \frac{R^2 + Z_L^2}{Z_L} \Rightarrow C$$

Đồ thị có dạng như câu 2

4. Thay đổi lần lượt ω để

a. U_R cực đại

$$U_R = I \cdot R = \frac{U \cdot R}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \frac{U \cdot R}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

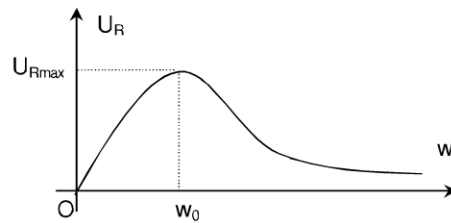
$$U_{R\max} = U \text{ khi } L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ mạch có cộng hưởng điện}$$

Bảng biến thiên:

| | | | |
|----------|---|----------------------------------|---|
| ω | 0 | $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ | |
| U_R | 0 | U | 0 |

Đồ thị:



b. Định ω để $U_{L\max}$

$$U_L = I \cdot Z_L = \frac{U \cdot Z_L}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \frac{U \cdot Z_L}{\sqrt{R^2 + Z_L^2 + Z_C^2 - 2Z_L Z_C}}$$

$$U_L = \frac{U \cdot L \omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2} - 2 \frac{L}{C}}} \text{ chia tử và mẫu cho } \omega \text{ và thu gọn lại}$$

$$U_L = \frac{U \cdot L}{\sqrt{\frac{1}{C^2 \omega^4} + (R^2 - \frac{2L}{C}) \frac{1}{\omega^2} + L^2}}$$

$$\text{Đặt } x = \frac{1}{\omega^2} \quad y = ax^2 + bx + d \text{ với } \begin{cases} a = \frac{1}{C^2} \\ b = R^2 - \frac{2L}{C} \\ d = L^2 \end{cases}$$

$$U_L = \frac{U \cdot L}{\sqrt{y}}$$

$$U_{L\max} \text{ khi } y_{\min}$$

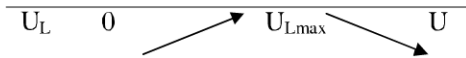
$$\text{Vì } a > 0 \text{ nên } y_{\min} = \frac{-b}{4a} \text{ khi } x = \frac{-b}{2a}$$

Thay các hằng số a, b, d vào ta tính được

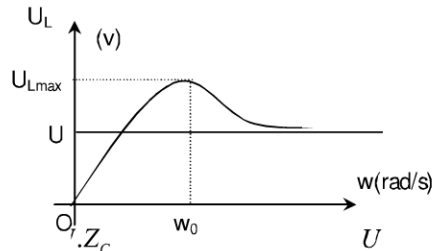
$$U_{L\max} = \frac{2U \cdot L}{R\sqrt{4LC - C^2 R^2}} \text{ khi } \omega_0 = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{2}{\frac{2L}{C} - R^2}} \text{ với điều kiện } \frac{2L}{C} > R^2$$

Bảng biến thiên:

| | | | |
|----------|---|------------|----------|
| ω | 0 | ω_0 | ∞ |
|----------|---|------------|----------|



Đồ thị:



c. Định w để U_{Cmax} :

$$U_C = I \cdot Z_C = \frac{U \cdot Z_C}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \frac{U}{C \cdot \omega \cdot \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2} - \frac{2L}{C}}}$$

$$U_C = \frac{U}{C \sqrt{L^2 \omega^4 + (R^2 - 2\frac{L}{C})\omega^2 + \frac{1}{C^2}}}$$

Đặt $w^2 = x$ $y = ax^2 + bx + d$ với $\begin{cases} a = L^2 \\ b = R^2 - \frac{2L}{C} \\ d = \frac{1}{C^2} \end{cases}$

$$U_C = \frac{U}{C \sqrt{y}}$$

U_{Cmax} khi y_{min}

Vì $a > 0$ nên $y_{min} = \frac{-b}{2a}$ khi $x = \frac{-b}{2a}$

Thay các hằng số a, b, d vào và biến đổi ta được

$$U_{Cmax} = \frac{2U \cdot L}{R \sqrt{4LC - C^2 R^2}} \text{ khi } w_0 = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{2L}{C} - R^2} \text{ với điều kiện } \frac{2L}{C} > R^2$$

Đồ thị có dạng như câu b.

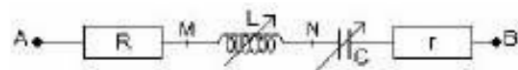
↳ Nhận xét: có thể dùng đạo hàm để tính U_{Cmax} khi w thay đổi.

Bài toán 9: cho mạch điện xoay chiều hình vẽ.

Hiệu thế 2 đầu đoạn mạch AB là

$$u = 85\sqrt{2} \sin 100\pi t \text{ (V)} \quad R = 70\Omega; r = 80\Omega$$

cuộn dây có L thay đổi được, tụ điện có C thay đổi được.



1. Điều chỉnh $L = \frac{3}{2\pi}$ H rồi thay đổi điện dung C . Tìm điện dung C để U_{MB} cực tiểu.

Khảo sát U_{MB} khi C thay đổi

2. Điều chỉnh $C = \frac{1}{7\pi} \cdot 10^{-3}$ F rồi thay đổi L . Tìm độ cảm L để U_{AN} cực đại. Khảo sát

U_{AN} khi L thay đổi.

Cách làm:

1. Tìm C để U_{MB} cực tiểu.

$$Z_L = 150\Omega, R = 70\Omega, r = 80\Omega$$

$$U_{MB} = I \cdot Z_{MB} = \frac{U \sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}}{\sqrt{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = U \sqrt{\frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$$

Ở bài toán này biểu thức phức tạp nên thay số vào rồi đặt ẩn số cho giống biểu thức toán
Đặt $x = (Z_L - Z_C)^2$ ($x > 0$)

$$y = \frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}{(R + r)^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \frac{80^2 + x}{150^2 + x}$$

$$U_{MB} = U \sqrt{y}$$

U_{MB} min khi y_{\min}

$$\text{Khảo sát hàm } y = \frac{80^2 + x}{150^2 + x} = 1 - \frac{150^2 - 80^2}{150^2 + x}$$

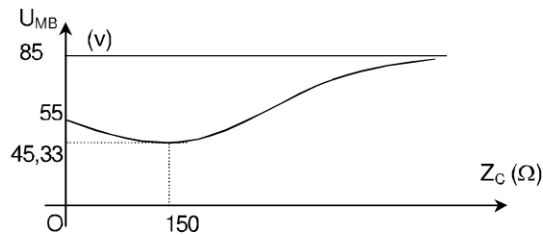
$$y_{\min} = 0.2845 \text{ khi } x = 0 \Leftrightarrow (Z_L - Z_C)^2 = 0 \Leftrightarrow Z_C = Z_L = 150 \Omega \Leftrightarrow C = \frac{1}{15\pi} \cdot 10^{-3} \text{ F}$$

$$U_{MB\min} = U \sqrt{y_{\min}} = 85 \sqrt{0.2845} = 45,33 \text{ (v)}$$

Bảng biến thiên:

| | | | |
|----------|----|-------|----------|
| Z_C | 0 | 150 | ∞ |
| U_{MB} | 55 | 45,33 | $U=85$ |

Đồ thị:



2. Tìm L để U_{AN} max:

$$U_{AN} = I \cdot Z_{AN} = \frac{U \sqrt{R^2 + Z_L^2}}{\sqrt{(R + r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = U \sqrt{\frac{R^2 + Z_L^2}{(R + r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$$

Đặt $x = Z_L$ ($x > 0$)

$$y = \frac{R^2 + Z_L^2}{(R + r)^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \frac{70^2 + x^2}{150^2 + (x - 150)^2}$$

$$U_{AN} = U \sqrt{y}$$

Để U_{AN} max thì y_{\max}

$$\text{Khảo sát: } y = \frac{70^2 + x^2}{150^2 + (x - 150)^2}$$

$$\text{Lấy đạo hàm rồi thu gọn: } y' = \frac{-300x^2 + 80200x + 70^2 \cdot 300}{[150^2 + (x - 150)^2]}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -300x^2 + 80200x + 1470000 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -17,22 \\ x = 284,55 \end{cases}$$

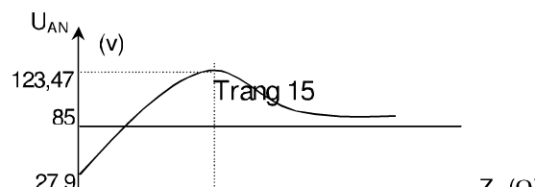
Bảng biến thiên:

| | | | | | |
|------|--|--------|---|--------|----------|
| x | | -17,22 | 0 | 284,55 | ∞ |
| y' | | - | + | 0 | - |
| y | | | | 2,11 | 1 |

$$y_{\max} = 2,11 \text{ khi } x = 284,55$$

$$Z_L = 284,55 \Omega \text{ thì } U_{AM\max} = U \sqrt{y_{\max}} = 85 \sqrt{2,11} = 123,47 \text{ v}$$

$$\text{Vậy khi } L = \frac{Z_L}{\omega} = 0,906 \text{ H thì } U_{AM\max} = 123,47 \text{ (v)}$$



Đồ thị:

↳ Nhận xét: ở bài tập 9 không thể đưa về tam thức bậc 2 ở mẫu số như các bài tập trước vì tử số có thêm 1 hằng số nên không thể thực hiện phép chia.

II. Bài toán áp dụng phép tính tích phân

1. Đặt vấn đề: Để xác định vận tốc tức thời, gia tốc tức thời của chuyển động khi biết sự phụ thuộc của vị trí của vật theo thời gian đã dẫn chúng ta đến khái niệm về đạo hàm

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \quad a(t) = \frac{dv}{dt}$$

Bài toán ngược: cho biết vận tốc tức thời $v(t)$ là 1 hàm đã biết. Xác định vị trí và quãng đường đi sau thời gian t đã dẫn chúng ta đến khái niệm về tích phân.

Ở phổ thông toán học ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng hoặc tính thể tích hình tròn xoay. Môn vật lý ứng dụng tích phân để tìm đại lượng vật lý biểu diễn dưới dạng diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $f(x)$ và các trục tọa độ như tính quãng đường đi, công của một lực thực hiện, xác định điện trường, điện trở, từ thông.

Phương pháp: dùng định nghĩa tích phân xác định.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Định nghĩa tích phân như là giới hạn của 1 tổng. Việc đi tìm hàm dưới dấu tích phân là vấn đề khó xác định cận trên, cận dưới nên chọn như thế nào cho phép tính đơn giản hơn.

Dưới đây là 1 số bài toán minh họa điều đó. Bắt đầu từ những bài dễ đến các bài khó hơn.

2. Bài tập áp dụng:

Bài toán 10: Một điện trở có dạng hình nón cụt, bán kính đáy lần lượt là a và b và chiều cao L . Giả sử mật độ đồng điện trở đều qua bất kỳ tiết diện nào. Tính điện trở của vật đó.

Cách làm: chọn trục Ox như hình vẽ

Ta chia khối điện trở thành những khúc điện trở nhỏ vi phân có chiều dài dx có tiết diện tròn bán kính r

Điện trở khúc vi phân có chiều dài

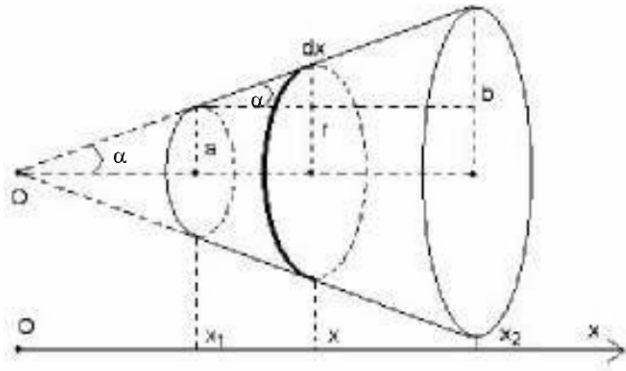
$$dx: dR = \rho \cdot \frac{dx}{S} \quad \rho: \text{là điện trở suất}$$

$$\text{Theo hình: } \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{b-a}{L} \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{x} \\ S = \pi \cdot r^2 \end{cases} \Rightarrow r = x \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$\text{Thay vào: } dR = \rho \cdot \frac{dx}{\pi \cdot r^2} = \rho \cdot \frac{dx}{\pi \cdot x^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Điện trở R của khối là điện trở tương đương nhiều khúc vi phân dR mắc nối tiếp nhau.

$$R = \sum_{i=1}^n dR_i = \int dR$$



$$R = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\rho \cdot dx}{\pi \cdot \tan^2 \alpha \cdot x^2} = \frac{\rho}{\pi \cdot \tan^2 \alpha} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2} = \frac{-\rho}{\pi \cdot \tan^2 \alpha} \cdot \frac{1}{x} \Big|_{x_1}^{x_2}$$

Các cận tích phân: $x_1 = \frac{a}{\tan \alpha}$; $x_2 = \frac{b}{\tan \alpha}$

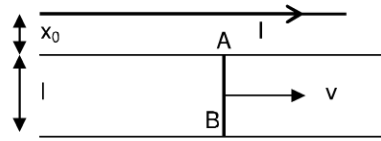
$$\Rightarrow R = -\frac{\rho}{\pi \cdot \tan^2 \alpha} \left[\frac{\tan \alpha}{b} - \frac{\tan \alpha}{a} \right] = \frac{\rho(b-a)}{\pi \cdot \tan \alpha \cdot ab} = \frac{\rho L}{\pi \cdot a \cdot b}$$

Khi $a=b$ khối điện trở có dạng hình trụ

$$R = \frac{\rho L}{\pi \cdot a^2} = \rho \cdot \frac{L}{S} \quad S: \text{tiết diện đáy hình trụ.}$$

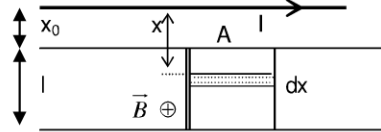
⇒ **Nhận xét:** Từ bài toán trên cho học sinh tính điện dung C của tụ điện phẳng có 2 mặt phẳng tạo với nhau một góc α .

Bài toán 11: Trong cùng một mặt phẳng với một dòng điện thẳng dài vô hạn có cường độ $I=20A$ người ta đặt hai thanh kim loại trượt song song với dòng điện cách dòng điện một khoảng $x_0 = 1 \text{ cm}$ và cách nhau $l = 0,5 \text{ m}$ (như hình vẽ). Trên hai thanh trượt người ta lồng vào một đoạn dây dẫn AB dài l . tìm hiệu điện thế xuất hiện giữa 2 đầu dây AB nếu cho dây AB trượt tịnh tiến trên các thanh với vận tốc $v=3m/s$



Cách làm:

Dây AB chuyển động trong từ trường của dòng I nên trong khung xuất hiện suất điện động cảm ứng



Dây không kín nên $U_{AB} = |E_C| = \left| -\frac{d\phi}{dt} \right|$

Xét đoạn dây vi phân dx chuyển động song song dòng điện cách dòng điện một đoạn x

Từ thông quét qua dây vi phân dx khi chuyển động

$$d\phi = B \cdot dS = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot v \cdot t \cdot dx}{2\pi x} \quad \text{với } dS = v \cdot t \cdot dx$$

Từ thông quét qua cả đoạn AB là tổng các từ thông quét qua các đoạn vi phân dx .

$$\phi = \sum d\phi = \int_{x_0}^{x_0+l} d\phi = \int_{x_0}^{x_0+l} \frac{\mu_0 \cdot I \cdot v \cdot t \cdot dx}{2\pi \cdot x} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot v \cdot t}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+l} \frac{dx}{x}$$

$$\phi = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot v \cdot t}{2\pi} \cdot \ln \left| \frac{x_0+l}{x_0} \right|$$

$$U_{AB} = |E_C| = \left| -\frac{d\phi}{dt} \right| = \frac{I \cdot v}{2\pi} \cdot \ln \left| \frac{x_0+l}{x_0} \right|$$

Thay số liệu vào $U_{AB} = 9,4 \cdot 10^{-5} \text{ V}$

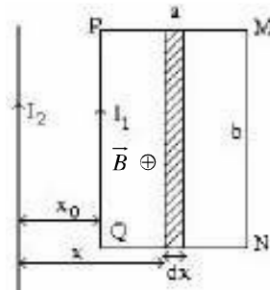
Bài toán 12: Khung dây chữ nhật cạnh $a=10\text{cm}$, $b=20\text{cm}$ đặt gần dây dẫn thẳng dài sao cho cạnh b song song dây dẫn và mặt phẳng khung chứa dây dẫn. Cạnh của khung dây dẫn và cách dây $x_0=5\text{cm}$. Dây dẫn thẳng mang dòng điện $I_1=5A$, khung dây mang dòng điện $I_2=1A$. Tính công cần thực hiện trong hai trường hợp:

a. Tịnh tiến khung một đoạn a theo phương nằm trong mặt phẳng khung và vuông góc với dây dẫn.

b. Quay khung 180° chung quanh cạnh b xa dây dẫn hơn. Coi rằng trong khi khung chuyển động dòng điện trong khung và trong dây dẫn thẳng là đều không đổi.

Cách làm:

a. Công của lực ngoài làm di chuyển khung được tính bằng công thức:



$$A_n = I_2 (\Phi_1 - \Phi_2)$$

Trong đó: Φ_1 : là từ thông gởi qua khung lúc đầu.

Φ_2 : là từ thông gởi qua khung lúc sau khi di chuyển một đoạn a.

tương tự: từ thông gởi qua dS của khung có chiều dài dx.

$$d\Phi = B \cdot dS \quad \text{với } (B = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I_1}{x}; \quad dS = b \cdot dx)$$

$$d\Phi = 2 \cdot 10^{-7} \cdot I_1 \cdot \frac{b \cdot dx}{x}$$

$$\Phi_1 = \int_{x_0}^{x_0+a} 2 \cdot 10^{-7} \cdot I_1 \cdot \frac{b \cdot dx}{x} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot I_1 \cdot b \cdot \ln \frac{x_0+a}{x_0}$$

$$\Phi_2 = - \int_{x_0+a}^{x_0+2a} 2 \cdot 10^{-7} \cdot I_1 \cdot \frac{b \cdot dx}{x} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot I_1 \cdot b \cdot \ln \frac{x_0+2a}{x_0+a}$$

$$A_n = 2 \cdot 10^{-7} \cdot b \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \left[\ln \frac{x_0+a}{x_0} - \ln \frac{x_0+2a}{x_0+a} \right] = 2 \cdot 10^{-7} \cdot b \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \ln \frac{(x_0+a)^2}{x_0(x_0+2a)} = 1,2 \cdot 10^{-7} (J)$$

b. Trường hợp quay khung dây 180° quanh cạnh b xa dây hơn thì Φ'_1 có giá trị cũ $\Phi'_1 = \Phi_1$ và Φ'_2 cũng có giá trị cũ nhưng vector \vec{n} của khung ngược chiều lần trước.

$$\Phi'_2 = -\Phi_2$$

$$A'_n = I_2 (\Phi'_1 - \Phi'_2) \rightarrow A'_n = 2 \cdot 10^{-7} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot b \left[\ln \frac{x_0+a}{x_0} + \ln \frac{x_0+2a}{x_0+a} \right]$$

$$A'_n = 2 \cdot 10^{-7} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot b \cdot \ln \frac{x_0+2a}{x_0} = 3,2 \cdot 10^{-7} (J)$$

Bổ sung: công thức tính công của lực từ khi một khung dây mang dòng điện chuyển động trong từ trường:

$$A = I (\Phi_2 - \Phi_1)$$

Công của lực ngoài: $A_n = -A$

$$A_n = I (\Phi_1 - \Phi_2) > 0$$

❖ **Nhận xét:** Qua 3 bài toán trên ta lấy cận tích phân theo đơn vị độ dài. Đối với các bài toán cần xác định đại lượng vật lý là một đại lượng vector, phương của các phần tử vi phân biến đổi liên tục. Để tính độ lớn ta phải chiếu lên trục đối xứng và chọn góc để làm cận tích phân. Bài toán sau đây sẽ minh họa điều đó.

Bài toán 13: Thanh nhựa tích điện âm -q uốn thành $\frac{1}{2}$ cung tròn bán kính R có tâm là O.

a. Xác định hướng và độ lớn của cường độ điện trường tại tâm O.

b. Một thanh nhựa khác tích điện dương +q uốn thành $\frac{1}{2}$ cung tròn bán kính R được nối liền với nhau tạo thành đường tròn (O,R). Xác định cường độ điện trường tại tâm O.

Cách làm:

a. Xác định \vec{E}

Kẻ trục OC chia cung AB làm 2 phần bằng nhau.

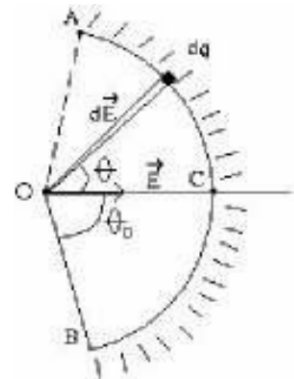
Do tính đối xứng hình học \vec{E} cùng phương OC.

Xét phần tử có chiều dài dl mang điện tích $dq = \lambda dl$ (λ là mật độ điện dài)

dq gây ra tại tâm O 1 điện trường $d\vec{E}$ có phương nằm trên bán kính nối từ O đến dq.

$$\text{Độ lớn: } dE = \frac{k \cdot dq}{R^2} = \frac{k \cdot \lambda \cdot dl}{R^2}$$

Vector cường độ điện trường tổng hợp tại O do điện tích q trên cung AB gây ra



$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n d\vec{E} = \int_{AB} d\vec{E}$$

Để tính độ lớn E ta chiếu đẳng thức vector lên đường OC là phương của \vec{E}

$$E = \int_{AB} dE \cdot \cos\theta = \int_{AB} k \cdot \frac{\lambda \cdot dl}{R^2} \cdot \cos\theta$$

Thay $dl = R \cdot d\theta$ vào $E = \int_{AB} k \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \cos\theta \cdot d\theta$

Đề ý rằng $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$ nếu $f(x)$ là hàm số chẵn.

$$E = 2 \cdot k \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \int_0^{\theta_0} \cos\theta \cdot d\theta = 2 \cdot k \cdot \frac{\lambda}{R} \sin\theta \Big|_0^{\theta_0}$$

$$E = 2 \cdot k \cdot \frac{\lambda \cdot \sin\theta_0}{R}$$

Vì $AB = \frac{1}{2}$ cung tròn nên: $\theta_0 = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin\theta_0 = 1 \quad \lambda = \frac{q}{l} = \frac{q}{\pi \cdot R}$

Thay vào $E = \frac{2kq}{\pi \cdot R^2}$ với $(k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0})$ hướng \vec{E} theo OC

b. Xác định \vec{E} tại O do cả vòng tròn:

Tương tự do $\frac{1}{2}$ cung tròn AB mang điện tích +q, \vec{E} có hướng ra xa điện tích dương, tức cùng hướng nửa cung tròn mang điện tích âm và có cùng độ lớn.

Cường độ điện trường tại O

$$E = E^+ + E^- = \frac{4kq}{\pi \cdot R^2}$$

☞ *Nhận xét*: Nếu cả vòng tròn mang cùng điện tích dương hoặc cùng điện tích âm thì $E = 0$ (gọi là vật dẫn cân bằng điện)

Bài toán 14: Một tụ điện phẳng được mắc vào nguồn điện để giữ cho hiệu điện thế các bản luôn luôn là U_0 . Đưa vào khoảng giữa hai bản đó một điện môi có hằng số điện môi là ϵ để lấp đầy.

a. Chứng minh rằng khi đó nguồn điện thực hiện 1 công bằng $A_{ng} = \frac{q_0 U_0 (\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon_0}$ trong

đó q_0 là điện tích trên các bản tụ điện ban đầu (khi chưa lấp đầy điện môi)

b. Tính công thực hiện bởi lực cơ học (lấp đầy điện môi). Công thực hiện do lực đặt lên điện môi hay bởi điện môi thực hiện?

c. Nhiệt lượng tỏa ra ở tụ trong thời gian lấp đầy.

Cách làm:

- Biểu thức năng lượng của tụ: $w = \frac{Q^2}{2C}$ (1)

- Trong quá trình điện môi dịch chuyển vào tụ thì:

+ Điện tích các bản tụ thay đổi.

+ Điện dung C của tụ thay đổi.

+ Hiệu thế U_0 giữa hai bản tụ không đổi do nối với nguồn.

- Lấy vi phân hai vế biểu thức (1)

$$dw = \frac{Q}{C} dQ - \frac{Q^2}{2C^2} dC$$

Vì hiệu thế không đổi $U_0 = \frac{Q}{C}$ nên $dw = U_0 dQ - \frac{U_0^2}{2} dC$

Ý nghĩa biểu thức: đây cũng là định luật bảo toàn năng lượng

+Số hạng thứ 1 về phải $dA_{ng} = U_0 \cdot dQ$ là công của nguồn điện làm thay đổi điện tích trên các bản tụ

Số hạng thứ 2 về phải $dA_C = \frac{U_0^2}{2} dC$ là công cơ học cần thiết đặt trên điện môi.

dW : độ biến thiên năng lượng của tụ cũng chính là nhiệt lượng tỏa ra.

a. Chứng minh: $A_{ng} = \frac{q_0 U_0 (\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon_0}$

Từ biểu thức: $dA_{ng} = U_0 \cdot dQ$

$$A_{ng} = \int_{q_0}^{q_1} U_0 dQ = U_0 \int_{q_0}^{q_1} dQ = U_0 Q \Big|_{q_0}^{q_1}$$

Lúc đầu điện tích của tụ q_0

Khi lấp đầy điện môi điện tích của tụ là $q_1 = \frac{\epsilon q_0}{\epsilon_0}$ (do $U_0 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_0}{C_0} \Rightarrow q_1$)

Thay cận vào: $A_{ng} = \frac{q_0 U_0 (\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon_0} = q_0 \cdot U_0 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right)$

b. Tính công cơ học:

Từ biểu thức $dA_C = \frac{U_0^2}{2} dC \rightarrow A_C = \int_{C_0}^{C_1} \frac{U_0^2}{2} dC = \frac{U_0^2}{2} C \Big|_{C_0}^{C_1}$

Cận tích phân : Điện dung tụ lúc đầu $C_0 = \frac{q_0}{U_0}$

Điện dung tụ lúc lấp đầy điện môi: $C_1 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \cdot \frac{q_0}{U_0}$ (tính từ q_1)

Thay vào: $A_C = \frac{q_0 U_0}{2} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right)$. Vì $A_C > 0$ công này do lực tác dụng lên điện môi gây ra.

c. $Q = dW = A_{ng} - A_C = \frac{q_0 U_0}{2} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right)$

C. HIỆU QUẢ CỦA CÁC PHƯƠNG PHÁP:

Bài toán tìm giá trị lớn nhất giúp học sinh lớp 11 có dịp làm quen ở các bài tập điện trường, công suất dòng điện một chiều, từ trường ... khi lên lớp 12 các em có dịp gặp lại lần nữa, tự tin hơn khi áp dụng được. So với đạo hàm thì phương pháp dùng Côsi mẫu số đơn giản hơn. Tuy nhiên cũng phải có những hàm số phải dùng đến đạo hàm.

Từ bài toán đơn giản, dẫn dắt học sinh đến những bài toán phức tạp theo tuần tự từ dễ đến khó, dùng phương pháp nào cho có lợi, tiết kiệm được thời gian.

Các bài tập nêu trên vừa có tính cơ bản, vừa có tính tổng quát giúp cho học sinh phân biệt và lựa chọn công cụ toán để dùng, có tính hệ thống phân biệt được cái đơn giản và cái khó của từng dạng bài tập.

Các bài tập này được dùng để dạy bồi dưỡng học sinh ôn thi tốt nghiệp phổ thông, ôn thi đại học và bồi dưỡng học sinh giỏi có hiệu quả phần nào.

Từ một phần nhỏ của phép tính tích phân cũng xây dựng phương hướng khi áp dụng để tạo niềm tin vững vàng và có kiến thức cơ bản giúp các em đọc sách tham khảo dễ dàng hơn.

D. BÀI HỌC KINH NGHIỆM:

Đề vận dụng kiến thức cho học sinh đòi hỏi có kiến thức rộng, hiểu kỹ vấn đề. Không nhất thiết phải chọn các bài tập khó, giải thật nhiều mà không hệ thống lại được để học sinh nắm vững.

Dù là học sinh yếu, trung bình, khá giỏi cũng phải bắt đầu từ kiến thức cơ bản, biết vận dụng công thức để giải bài tập từ dễ đến khó. Đối với học sinh giỏi, biết vận dụng kiến thức đã học để giải các bài tập khó hơn.

E.KẾT LUẬN:

Bài tập vật lý ngày càng phong phú hơn, lượng kiến thức ngày càng nhiều, đa dạng, đòi hỏi giáo viên lựa chọn cho mình phương pháp thích hợp để dạy học.

Phương pháp tương đối phù hợp với từng đối tượng học sinh nhằm đạt hiệu quả cao nhất.

Xây dựng được phương pháp tốt cũng chưa đủ mà còn đòi hỏi giáo viên phải có lòng nhiệt tình, biết tạo ra những tình huống làm cho các em say mê yêu thích môn vật lý. Xin được phép nhắc lại lời tâm sự của một em học sinh giỏi vòng tỉnh như sau: “Nhờ được học môn vật lý mà các môn tự nhiên khác như môn toán, môn hóa em cũng giỏi theo”. Đó cũng là niềm vui, niềm hạnh phúc, an ủi được người thầy đã bỏ công sức ra dạy dỗ cho các em, cũng là lời động viên chân tình giúp cho người thầy vẫn còn đứng vững trên bục giảng.

Lần đầu tiên viết sáng kiến kinh nghiệm, vẫn còn hạn chế về ngôn ngữ, không tránh khỏi sai sót. Kiến thức toán học thì rộng rãi, chỉ là đóng góp phần nhỏ kinh nghiệm dạy học của mình. Kính mong các đồng nghiệp đóng góp và bổ sung thêm, để sáng kiến kinh nghiệm được hoàn hảo hơn và được dùng làm tài liệu tham khảo cho học sinh.

Xin chân thành cảm ơn!.

Cái Bè, ngày 15 tháng 3 năm 2004

Người viết,

Phạm Việt Dũng