PROBLEMAS DE COMPLEMENTOS DE CALCULO ALGEBRICO Y DE CALCULO DIFERENCIAL

SEXTA EDICION

PRIMERA PARTE

COMPLEMENTOS DE CALCULO ALGEBRICO

Prof. JOSE LUIS MATAIX PLANA

Doctor Ingeniero Industrial

EDITORIAL DOSSAT, S. A.

PLAZA DE SANTA ANA, 9 - MADRID.

PROBLEMAS DE COMPLEMENTOS

DE

CALCULO ALGEBRICO

Y DE

CALCULO DIFERENCIAL

(RESUELTOS Y EXPLICADOS)

PROF. JOSE LUIS MATAIX PLANA

DOCTOR INGENIERO INDUSTRIAL

EDITORIAL DOSSAT, S. A.

PLAZA DE SANTA ANA, 9

MADRID

Depósito Legal: M. 17.382-1967

Nuevas Gráficas, S. A.-Andrés Mellado, 18.-Madrid (15).-X-1967

PROLOGO A LA SEXTA EDICION

Agotadas las cinco primeras ediciones de nuestro libro MIL PROBLEMAS DE CALCULO INFINITESIMAL hemos editado esta sexta edición ampliando considerablemente el número de cuestiones tratadas y el de problemas resueltos.

La obra completa la hemos dividido en esta sexta edición en dos libros titulados:

Problemas de Complementos de Cálculo Algébrico - Cálculo Diferencial.

Mil Problemas de Cálculo Integral.

Este primer libro de problemas que hoy prologamos, dedicado a las materias de matemáticas que se cursan en el primer curso de las Escuelas Técnicas Superiores, lo hemos dividido en dos partes.

Primera parte: Complementos de Cálculo Algébrico *con problemas de matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, límites, series, variable compleja y teoría de ecuaciones y la* Segunda parte *con problemas de* Cálculo Diferencial *propiamente dicho.*

No hemos pretendido ser originales. La mayoría de los problemas han sido propuestos en exámenes de las Escuelas Técnicas Superiores, algunos son clásicos y otros originales.

Todos los problemas han sido resueltos para que el alumno, a quien especialmente va dirigido este trabajo, pueda seguirlos fácilmente y completar su formación práctica.

EL AUTOR

Madrid, octubre de 1967

INDICE DE MATERIAS

PRIMERA PARTE

COMPLEMENTOS DE CÁLCULO ALGÉBRICO

SEGUNDA PARTE

CÁLCULO DIFERENCIAL

PRIMERA PARTE

PROBLEMAS DE COMPLEMENTOS DE CALCULO ALGEBRICO

1 *Matrices – Determinantes – Aplicación a sistemas lineales*

I

MATRICES - DETERMINANTES - APLICACION A SISTEMAS LINEALES

1. *Hallar las matrices A y B deducidas de*

$$2A - 5B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-A + 3B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

RESOLUCIÓN:

$$\left.\begin{aligned} 2A - 5B &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ -2A + 6B &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\}$$

sumándolas

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

de la segunda ecuación propuesta, deducimos

$$A = 3\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 18 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -1 \\ 15 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{13} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{15} & \mathbf{3} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

2. *Dadas las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Hallar el producto A · B · C y comprobarlo.

RESOLUCIÓN :

$$A \cdot B \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

comprobación : en lugar de (A · B) · C efectuaremos A · (B · C)

$$A \cdot B \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

el mismo resultado

Solución:

$$\mathbf{A \cdot B \cdot C} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

3. *Dadas las dos matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

efectuar los productos A · B *y* B · A.

RESOLUCIÓN :

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 10+6 & 6+3 \\ 5+0 & 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 9 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+3 & 15+0 \\ 4+1 & 6+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 15 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\mathbf{A \cdot B} = \begin{bmatrix} \mathbf{16} & \mathbf{9} \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B \cdot A} = \begin{bmatrix} \mathbf{13} & \mathbf{15} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$$

4. *Dadas las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

calcular la matriz

$$2A' + B^{-1} - C$$

RESOLUCIÓN :

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad |B| = 1; \quad B' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$2A' + B^{-1} - C = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{6} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

5. *Dadas las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

calcular la matriz

$$A^2 \cdot B^{-1}$$

RESOLUCIÓN :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 8 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}; \quad |B| = -1; \quad B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 8 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 11 \\ 8 & -1 & 16 \\ 19 & -12 & -13 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{11} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-1} & \mathbf{16} \\ \mathbf{19} & \mathbf{-12} & \mathbf{-13} \end{bmatrix}$$

6. *Sabiendo que*

$$[x_1 \ x_2] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = [2 \ \ -1]$$

calcular la matriz $[x_1 \ x_2]$

RESOLUCIÓN:

$$[x_1 \ x_2] \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = [2\,x_2 \quad -x_1 + x_2]$$

e igualando a $[2 \ -1]$

$$\left.\begin{array}{r} 2\,x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 = -1 \end{array}\right\} \text{ de donde } \ x_1 = 2, \ \ x_2 = 1$$

$$\mathbf{[2 \quad 1]}$$

7. *Dada la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

calcular $A \cdot A'$ *y* $A' \cdot A$.

RESOLUCIÓN:

$$A \cdot A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 5 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A' \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 3 & -3 \\ -7 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\mathbf{A \cdot A'} = \begin{bmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{5} \\ \mathbf{5} & \mathbf{14} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A' \cdot A} = \begin{bmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{-7} & \mathbf{3} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-7} & \mathbf{5} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$$

8. *Dada la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.° *Determinar la matriz inversa* A^{-1}.

2.° *Comprobar que* $A \cdot A^{-1} = I$ *(matriz unidad).*

RESOLUCIÓN:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -43; \qquad A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$A^{-1} = -\frac{1}{43}\begin{bmatrix}1 & 2 & -11\\ -4 & -8 & 1\\ 12 & 19 & 3\end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = -\frac{1}{43}\begin{bmatrix}1 & 5 & 2\\ 0 & 3 & -1\\ 4 & 1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 2 & -11\\ -4 & -8 & 1\\ -12 & 19 & 3\end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{43}\begin{bmatrix}1-20-24 & 2-40+38 & -11+5+6\\ 0-12+12 & 0-24-19 & 0+3-3\\ 4-4+0 & 8-8+0 & -44+1+0\end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{43}\begin{bmatrix}-43 & 0 & 0\\ 0 & -43 & 0\\ 0 & 0 & -43\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = I$$

Solución:

1.° $\mathbf{A^{-1}} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{43}}\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-11}\\ \mathbf{-4} & \mathbf{-8} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-12} & \mathbf{19} & \mathbf{3}\end{bmatrix}$

2.° $\mathbf{A \cdot A^{-1}} = \begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix}$

9. *Dada la matriz*

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

calcular A^2, A^3 *y* A^4

RESOLUCIÓN:

$$A^2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 15 & 16\end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0\\ 15 & 16\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 63 & 64\end{bmatrix}$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0\\ 63 & 64\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 255 & 256\end{bmatrix}$$

Solución:

$$\mathbf{A^2} = \begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{15} & \mathbf{16}\end{bmatrix}; \quad \mathbf{A^3} = \begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{63} & \mathbf{64}\end{bmatrix}; \quad \mathbf{A^4} = \begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{255} & \mathbf{256}\end{bmatrix}$$

10. *Sobre el producto*

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{bmatrix}$$

comprobar la validez de la regla

$$[A \cdot B]' = B' \cdot A'$$

RESOLUCIÓN:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} & a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23}\\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} & a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23}\end{bmatrix}$$

$$[A \cdot B]' = \begin{bmatrix}a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21}\\ a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22}\\ a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23} & a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23}\end{bmatrix} \qquad [1]$$

por otro lado, calculemos $B' \cdot A'$

$$B' \cdot A' = \begin{bmatrix}b_{11} & b_{21}\\ b_{12} & b_{22}\\ b_{13} & b_{23}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_{11} a_{11} + b_{21} a_{12} & b_{11} a_{21} + b_{21} a_{22}\\ \multicolumn{2}{c}{\text{lo mismo que [1]}}\end{bmatrix}$$

Solución:

$$[\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}]' = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{A}'$$

11. *Resolver la ecuación*

$$xA + I = B$$

siendo

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & 2\end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}; \quad I = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

RESOLUCIÓN:

Calculemos A' y A^{-1}:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \qquad |A| = 2; \qquad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

de la ecuación dada

$$x\,A = B - I; \qquad x\,AA^{-1} = (B - I)\,A^{-1}$$

de donde

$$x = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{25}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{25}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

12. *Dada la matriz*

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

hallar la suma

$$I + A + A^2 + A^3 + \ldots, + A^n + \ldots,$$

(*I es la matriz unidad.*)

RESOLUCIÓN:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot M \quad \text{llamando } M \text{ a la matriz } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A^2 = \left(\frac{1}{2}\,M\right)^2 = \frac{1}{4}\,M^2 = \frac{1}{4}\,I \quad \text{ya que efectuando } M\cdot M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = I$$

$$A^3 = \frac{1}{4}\,I\cdot\frac{1}{2}\,M = \frac{1}{8}\,M$$

$$A^3 = \frac{1}{8}\,M\cdot\frac{1}{2}\,M = \frac{1}{16}\,I$$

la suma pedida valdrá, sacando factores comunes alternativamente I y M

$$\Sigma = I\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right] + M\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots\right) =$$

$$= I\cdot\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{M}{2}\cdot\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{4}{3}\,I + \frac{2}{3}\,M = \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

13. *Dada la matriz simétrica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

y la matriz

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

comprobar que $B = C \cdot A \cdot C'$ *es otra matriz simétrica.*

RESOLUCIÓN:

$$B = C \cdot A \cdot C' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0-1-10 & 0+2-0 & 0+0-6 \\ 3-1+5 & -3+2+0 & 15+0+3 \\ 1+0+15 & -1+0+0 & 5+0+9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -11 & 2 & -6 \\ 7 & -1 & 18 \\ 16 & -1 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -37 & -29 \\ -37 & 38 & 61 \\ -29 & 61 & 58 \end{bmatrix}$$

SIMETRICA c. q. d.

Solución:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{14} & \mathbf{-37} & \mathbf{-29} \\ \mathbf{-37} & \mathbf{38} & \mathbf{61} \\ \mathbf{-29} & \mathbf{61} & \mathbf{58} \end{bmatrix}$$

14. *Hallar la matriz A, tal que*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

y comprobar el resultado.

RESOLUCIÓN:

Despejando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & 9 & 4 \end{bmatrix} \qquad [1]$$

pero

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad \text{luego} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

sustituyendo en (1)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & 9 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Comprobación: Sustituyendo en la expresión dada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

15. *Dada la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

calcular el valor de la expresión.

$$(A + A^{-1})^n$$

RESOLUCIÓN:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad |A| = -1; \quad A^{-1} = -\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A$$

luego la expresión dada vale

$$(A + A)^n = 2^n \cdot A^n \qquad [1]$$

calculemos A^n por inducción

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$$

de donde deducimos, según que el exponente sea par o impar

$$A^n \begin{cases} n \text{ impar} & A^n = A \\ n \text{ par} & A^n = I \quad \text{llevamos a (1)} \end{cases}$$

Solución:

para $n = 2m$ $\quad (A + A^{-1})^{2m} = 2^{2m} \cdot I$

para $n = 2m-1$ $\quad (A + A^{-1})^{2m-1} = 2^{2m-1} \cdot A$

16. *Dada la matriz*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

se pide:

1.º *Calcular la matriz inversa.*

2.º *Comprobar si la matriz C es ortogonal.*

RESOLUCIÓN:

1.º C' (traspuesta de C) $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$$C^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} \\ A'_{21} & A'_{22} & A'_{23} \\ A'_{31} & A'_{32} & A'_{33} \end{bmatrix}}{\Delta} \quad \begin{cases} \Delta \text{ es el determinante de C} \\ A'_{ij} \text{ el adjunto de } a'_{ij} \text{ en la } C' \text{ (traspuesta de C)} \end{cases}$$

en nuestro caso $\Delta = 1$, luego

$$C^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

2.º La matriz es ortogonal ya que su inversa C^{-1} coincide con su traspuesta C'

Solución:

1. $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} & -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} & \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} \end{bmatrix}$

2. **es ortogonal ya que $C^{-1} = C'$**

17. *Hallar el rango de la matriz.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

Tomemos el determinante principal de tercer orden, que desarrollado se ve que es nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0\,;$$

y veamos qué combinación lineal existe entre sus filas

$$\left.\begin{aligned} 1+3\lambda+\mu&=0 \\ 2\lambda+\mu&=0 \\ 1+7\lambda+3\mu&=0 \end{aligned}\right\}$$

resolviendo el sistema, se obtiene $\lambda=-1$; $\mu=2$, luego se observa que la primera fila más el doble de la tercera es igual a la segunda fila. Como esto sucede en todos los determinantes menores de tercer orden, todos será nulos.

En efecto:

$$1+2=3\,; \qquad 2=2\,; \qquad 1+6=7\,; \qquad 1=1\,; \qquad -1+8=7$$

tomemos el determinante menor principal de segundo orden

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \text{luego es de rango 2.}$$

Solución:

2

18. *Hallar el rango de la matriz*

$$\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{Vmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

Formemos los determinantes adjuntos de tercer orden hasta que haya alguno no nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0\,; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0\,; \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

todos los menores de tercer orden son nulos. Formemos los de segundo orden

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \quad \text{luego es de rango dos.}$$

Solución:

2

19. *Calcular el valor del determinante*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 2 & \log 20 & \log 200 & \log 2000 \\ \log^2 2 & \log^2 20 & \log^2 200 & \log^2 2000 \\ \log^3 2 & \log^3 20 & \log^3 200 & \log^3 2000 \end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

Es un determinante de Vandermonde, cuyo desarrollo es

$$V = (\log 20 - \log 2)(\log 200 - \log 2)(\log 200 - \log 20)(\log 2000 - \log 2)\cdot$$

$$\cdot(\log 2000 - \log 20)(\log 2000 - \log 200) = \log\frac{20}{2}\cdot\log\frac{200}{2}\cdot\log\frac{200}{20}\cdot$$

$$\cdot\log\frac{2000}{2}\cdot\log\frac{2000}{20}\cdot\log\frac{2000}{200} = 1\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 12$$

Solución:

12

20. *Calcular el valor del siguiente determinante*

$$\begin{vmatrix} \mathrm{Sh}\,2x & -1 & \mathrm{Ch}\,2x \\ \mathrm{Ch}\,x & -\mathrm{Sh}\,x & \mathrm{Sh}\,x \\ \mathrm{Sh}\,x & \mathrm{Ch}\,x & \mathrm{Ch}\,x \end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

Desarrollando por la primera columna

$$\Delta = \mathrm{Sh}\,2x(-2\,\mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{Ch}\,x) - \mathrm{Ch}\,x(-\mathrm{Ch}\,x - \mathrm{Ch}\,x\,\mathrm{Ch}2x) + \mathrm{Sh}\,x(-\mathrm{Sh}\,x + \mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{Ch}\,2x) =$$

$$= -\mathrm{Sh}^2\,2x + \mathrm{Ch}^2\,x + \mathrm{Ch}^2\,x\,\mathrm{Ch}\,2x - \mathrm{Sh}^2\,x + \mathrm{Sh}^2\,x\,\mathrm{Ch}\,2x =$$

$$= -\mathrm{Sh}^2\,2x + (\mathrm{Ch}^2\,x - \mathrm{Sh}^2\,x) + \mathrm{Ch}\,2x(\mathrm{Ch}^2\,x + \mathrm{Sh}^2\,x) =$$

$$= 1 + \mathrm{Ch}^2\,2x - \mathrm{Sh}^2\,2x = 2$$

Solución:

2

21. *Calcular el valor del determinante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots n^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \dots (n+1)^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & \dots (n+2)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 & \dots (2n-1)^2 \end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

Si de cada columna restamos la anterior, van quedando las diferencias primeras que son

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \dots\ (2n-1)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1^2 & 3 & 5 & \dots 2n-1 \\ 2^2 & 5 & 7 & \dots 2n+1 \\ 3^2 & 7 & 9 & \dots 2n+3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^2 & 2n+1 & 2n+3 & \dots 4n-3 \end{vmatrix}$$

y volviendo a restar de cada columna la anterior a partir de la tercera

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2\dots 2 \\ 2^2 & 5 & 2\dots 2 \\ 3^2 & 7 & 2\dots 2 \\ \dots & \dots & \dots \\ n^2 & 2n+1 & 2\dots 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

$\Delta = 0$

22. *Desarrollar el determinante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN:

Restando de cada fila, la primera, se obtiene

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \dots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 \dots a_n$$

Solución:

$$\Delta = \mathbf{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3, \dots \; a_n}$$

23. *Dados*

$$A_1 = x - a, \quad A_2 = 2x - (a+b), \quad A_3 = 3x - (a+b+c), \dots$$
$$A_n = nx - (a + b + \dots + l)$$

demostrar que el determinante siguiente Δ, tiene por valor

$$\Delta = (x-a)\,(x-b)\,(x-c) \dots (x-l)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & A_1 & A_1 & A_1 & \dots & A_1 & A_1 \\ A_1 & A_2 & A_2 & A_2 & \dots & A_2 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_3 & \dots & A_3 & A_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \dots & A_4 & A_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \dots & A_{n-1} & A_{n-1} \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \dots & A_{n-1} & A_n \end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN:

En efecto, si restamos de cada fila la anterior, obtendremos una matriz que tiene todos los elementos de un lado de la diagonal principal nulos y cuyo valor es el producto de dichos elementos de la diagonal principal que son

$$A_1 = x - a, \quad A_2 - A_1 = x - b, \quad A_3 - A_2 = x - c, \; \dots, \; A_n - A_{n-1} = x - l$$

Solución:

$$\Delta = \mathbf{(x-a)\;(x-b)\;(x-c)\;\dots\;(x-\mathit{l})}$$

24. *Calcular el determinante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \dots & \binom{p}{n-1} \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \binom{p+1}{2} & \dots & \binom{p+1}{n-1} \\ 1 & \binom{p+2}{1} & \binom{p+2}{2} & \dots & \binom{p+2}{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{p+n-1}{1} & \binom{p+n-1}{2} & \dots & \binom{p+n-1}{n-1} \end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN:

Si restamos de cada fila la anterior, teniendo en cuenta que

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \dots & \binom{p}{n-1} \\ 0 & 1 & \binom{p}{1} & \dots & \binom{p}{n-2} \\ 0 & 1 & \binom{p+1}{1} & \dots & \binom{p+1}{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \binom{p+n-2}{1} & \dots & \binom{p+n-2}{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \dots & \binom{p}{n-2} \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \dots & \binom{p+1}{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{p+n-2}{1} & \dots & \binom{p+n-2}{n-2} \end{vmatrix}$$

y si aplicamos reiteradamente éste razonamiento, obtendríamos finalmente

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \binom{p}{1} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Solución:

$$\Delta = \mathbf{1}$$

25. *Desarrollar el determinante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+yi & -z+ui & i & i \\ z+ui & x-yi & -xi & \alpha i \\ 0 & 0 & \alpha+\beta i & -\gamma+\delta i \\ 0 & 0 & \gamma+\delta i & \alpha-\beta i \end{vmatrix}$$

Resolución:

Desarrollando por las dos primeras columnas

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+yi & -z+ui \\ z+ui & x-yi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha+\beta i & -\gamma+\delta i \\ \gamma+\delta i & \alpha-\beta i \end{vmatrix} =$$

$$= [x^2+y^2+z^2+u^2]\,[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2]$$

Solución:

$$\Delta = [\mathbf{x^2+y^2+z^2+u^2}]\cdot[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2]$$

26. *Desarrollar el siguiente determinante, llegando a una expresión formada por factores de primer grado*

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 2x-4 & x^2-4 & x^3-8 \\ 3x-9 & x^2-9 & x^3-27 \end{vmatrix}$$

Resolución:

Sacando $(x-1)$ factor común de la primera fila, $(x-2)$ de la segunda y $(x-3)$ de la tercera, obteríamos

$$\Delta = (x-1)\,(x-2)\,(x-3) \begin{vmatrix} 1 & x+1 & x^2+x+1 \\ 2 & x+2 & x^2+2x+4 \\ 3 & x+3 & x^2+3x+9 \end{vmatrix}$$

restando de la segunda columna la primera, y de la tercera columna la segunda multiplicada por x y la primera

$$\Delta = (x-1)(x-2)(x-3) \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & x & 6 \end{vmatrix} = x\,(x-1)(x-2)(x-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= x\,(x-1)\,(x-2)(x-3)\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -2x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$$

Solución:

$$\Delta = -\mathbf{2x(x-1)\,(x-2)\,(x-3)}$$

27. *Desarrollar el determinante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Resolución:

Restando de la tercera columna, la segunda

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 0 \\ 2b & b-c-a & a+b+c \\ 2c & 2c & -a-b-c \end{vmatrix}$$

sumando a la segunda fila la tercera

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 0 \\ 2b+2c & b+c \quad a & 0 \\ 2c & 2c & -a-b-c \end{vmatrix} = -(a+b+c) \begin{vmatrix} a-b-c & 2a \\ 2b+2c & b+c-a \end{vmatrix}$$

sumando a la segunda fila la primera

$$\Delta = -(a+b+c) \begin{vmatrix} a-b-c & 2a \\ a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = -(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a-b-c & 2a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Solución:

$$\Delta = (\mathbf{a+b+c})^3$$

28. *Calcular el valor del siguiente determinante, desarrollando por los elementos de la primera fila y primera columna*

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & 0 & 0 \\ b & 0 & x & 0 \\ c & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

Resolución :

$$\Delta = x \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - a^2 \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} + ab \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} - ac \begin{vmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ ab \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} - b^2 \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} + bc \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - ac \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{vmatrix} + bc \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} -$$

$$- c^2 \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^4 - a^2 x^2 - b^2 x^2 - c^2 x^2$$

Solución:

$$\Delta = \mathbf{x^4 - (a^2 + b^2 + c^2) x^2}$$

29. *Hallar las raíces de la ecuación*

$$\begin{vmatrix} a & b & c & x \\ b & a & x & c \\ c & x & a & b \\ x & c & b & a \end{vmatrix} = 0$$

obtenidas las cuatro raíces, calcular sus valores para

$$a = 1 ; \quad b = \sqrt{-1} ; \quad c = -1$$

Resolución :

El determinante dado lo podemos escribir de las cuatro formas siguientes.

1.ª
$$\begin{vmatrix} a+b+c+x & a+b+c+x & a+b+c+x & a+b+c+x \\ b & a & x & c \\ c & x & a & b \\ x & c & b & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & x & c \\ c & x & a & b \\ x & c & b & a \end{vmatrix} = 0 ; \quad a+b+c+x = 0 \qquad \textbf{[1]}$$

2.ª
$$\begin{vmatrix} a+b-x-c & a+b-x-c & c+x-a-b & c+x-a-b \\ b & a & x & c \\ c & x & a & b \\ x & c & b & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b-x-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ b & a & x & c \\ c & x & a & b \\ x & c & b & a \end{vmatrix} = 0 ; \quad a+b-x-c = 0 \qquad [2]$$

3.ª
$$\begin{vmatrix} a+x-b-c & b+c-a-x & b+c-a-x & a+x-b-c \\ b & a & x & c \\ c & x & a & b \\ x & c & b & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+x-b-c) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ b & a & x & c \\ c & x & a & b \\ x & c & b & a \end{vmatrix} = 0 ; \quad a+x-b-c = 0 \qquad [3]$$

$$4.^a \quad \begin{vmatrix} a+c-b-x & b+x-a-c & a+c-b-x & b+x-a-c \\ b & a & x & c \\ c & x & a & b \\ x & c & b & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+c-b-x)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ b & a & x & c \\ c & x & a & b \\ x & c & b & a \end{vmatrix} = 0; \quad a+c-b-x=0 \qquad [4]$$

las (1), (2), (3) y (4) nos dan las cuatro raíces que tiene la ecuación

Solución:

$$\mathbf{x_1 = -a-b-c = -\sqrt{-1}; \qquad x_3 = b+c-a = -2+\sqrt{-1}}$$

$$\mathbf{x_2 = a+b-c = 2+\sqrt{-1}; \qquad x_4 = a+c-b = -\sqrt{-1}}$$

30. *Desarrollar el determinante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+r & a+2r & \dots & a+(n-1)r \\ a+r & a+2r & a+3r & \dots & a+nr \\ a+2r & a+3r & a+4r & \dots & a+(n+1)r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+(n-1)r & a+nr & a+(n+1)r & \dots & a+2(n-1)r \end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN:

Si restamos de cada fila la anterior

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+r & a+2r & \dots & a+(n-1)r \\ r & r & r & \dots & r \\ r & r & r & \dots & r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r & r & r & \dots & r \end{vmatrix}$$

que es cero por tener dos filas iguales

Solución:

$$\mathbf{\Delta = 0}$$

31. *Desarrollar el determinante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2n+1 \\ -1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a \end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN:

Desarrollando por los elementos de la primera fila y de la primera columna

$$\Delta = a^n + 3a^{n-1} + 5a^{n-2} + \dots + (2n-3)a^2 + (2n-1)a + (2n+1)$$

multiplicando los dos miembros por a

$$\Delta \cdot a = a^{n+1} + 3a^n + 5a^{n-1} + 7a^{n-2} + \dots + (2n-1)a^2 + (2n+1)a$$

y restándola de la anterior

$$\Delta(a-1) = a^{n+1} - (2n+1) + 2(a^n + a^{n-1} + \dots + a^2 + a) =$$

$$= a^{n+1} - (2n+1) + 2a\frac{a^n - 1}{a-1}$$

de donde

$$\Delta = \frac{a^{n+1} - (2n+1)}{a-1} + 2a\frac{a^n-1}{(a-1)^2} = \frac{a^{n+2} + a^{n+1} - (2n+3)a + (2n+1)}{(a-1)^2}$$

Solución:

$$\mathbf{\Delta = \frac{a^{n+2} + a^{n+1} - (2n+3)a + (2n+1)}{(a-1)^2}}$$

32. *Hallar el determinante Δ producto del determinante Δ_1 por otro que no difiera más que en los elementos de la tercera fila que son 2, 20, -8,0*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \left[\dfrac{1}{2^{-\frac{1}{3}}}\right]^3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-2} \cdot \dfrac{1}{5^{-2}}} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 20 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -16 \quad \text{luego } \Delta_1\Delta_2 = 64$$

formemos el producto $\Delta_1\Delta_2$

$$\Delta_1\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 13 & 46 & 5 \\ 1 & 5 & 38 & 0 \\ 1 & 5 & 14 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 40 & 2 \\ 0 & 2 & 36 & -1 \\ 0 & 2 & 12 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 16 & -4 \\ 0 & 24 & -4 \\ 2 & 12 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-64 + 96) = 64$$

Solución:

$$\boldsymbol{\Delta = \Delta_1 \cdot \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 13 & 46 & 5 \\ 1 & 5 & 38 & 0 \\ 1 & 5 & 14 & 4 \end{vmatrix} = 64}$$

33. *Desarrollar por los menores de los elementos de las dos primeras columnas, el determinante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 10 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 10 \cdot (-7) - (-3) \cdot 9 + 4 \cdot 4 + (-11) \cdot 5 - (-32) \cdot 3 + 14 \cdot (-1) = 0$$

Solución:

$$\boldsymbol{\Delta = 0}$$

34. *Hallar los valores de* x *que anulan el determinante*

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & x^2 & 0 \\ -2 & x^2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

Sumando a la tercera columna, el quíntuplo de la cuarta

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & x^2 & 0 \\ -2 & x^2 & 10 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -4 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & x^2 \\ -2 & x^2 & 10 \end{vmatrix}$$

restando de la tercera fila el duplo de la primera

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -4 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & x^2 \\ 0 & x^2-10 & 18 \end{vmatrix} = 9 + x^2(x^2-10) = x^4 - 10x^2 + 9$$

$$\Delta = 0 = x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \qquad x^2 = 5 \pm 4 = \begin{cases} 9 & x = \pm 3 \\ 1 & x = \pm 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\mathbf{x = \pm 3; \qquad x = \pm 1}$$

35. *Desarrollar el determinante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{a+c} & \dfrac{1}{a+b} \\ \dfrac{1}{b+c} & -\dfrac{1}{b} & \dfrac{1}{a+b} \\ \dfrac{1}{b+c} & \dfrac{1}{a+c} & -\dfrac{1}{c} \end{vmatrix}$$

Resolución :

$$\Delta = -\frac{1}{abc} + \frac{2}{(a+b)(a+c)(b+c)} + \frac{1}{b(a+b)(b+c)} +$$

$$+ \frac{1}{a(a+b)(a+c)} + \frac{1}{c(a+c)(b+c)} =$$

$$= \frac{-(a+b)(a+c)(b+c)+2abc+ac(a+c)+bc(b+c)+ab(a+b)}{abc(a+b)(a+c)(b+c)} = 0$$

Solución:

$$\mathbf{\Delta = 0}$$

36. *Determinar el valor de* x *que anula el siguiente determinante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ x & -2 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 6 & x \\ 3 & 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Resolución :

Sumando a la cuarta fila la segunda

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ x & -2 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 6 & x \\ x+3 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ x+3 & 3 & 4 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & -2 & 4 \\ x+3 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -4[15x+23] - x[15x+22] = -15x^2 - 82x - 92 = 0$$

$$15x^2 + 82x + 92 = 0 \qquad x = \frac{-41 \pm \sqrt{301}}{15}$$

Solución:

$$\mathbf{x = \frac{-41 \pm \sqrt{301}}{15}}$$

37. *Hallar el valor del determinante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Solución:

$$\Delta = \mathbf{1}$$

38. *Desarrollar el determinante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

Desarrollando por los adjuntos de los elementos de la primera fila y de la primera columna

$$\Delta = a \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} x & 0 \\ -1 & x \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} -1 & x \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Solución:

$$\Delta = \mathbf{ax^3 + bx^2 + cx + d}$$

39. *Desarrollar el determinante*

$$\begin{vmatrix} x - 1 + \sqrt{3} & 2 - 3i & 3 - 6\sqrt{3} \\ \sqrt{3} + x - 1 & x + 1 + \sqrt{3} - 3i & 3 - 6\sqrt{3} \\ 2(1 - x) - \sqrt{12} & 3 - x - \sqrt{3} + 6i & 3x - 8 + 6\sqrt{12} + \sqrt{5} \end{vmatrix}$$

y resolver la ecuación que se obtiene al igualarlo a cero.

RESOLUCIÓN :

Restando de la segunda fila la primera, y sumando a la tercera el doble de la segunda.

$$\begin{vmatrix} x - 1 + \sqrt{3} & 2 - 3i & 3 - 6\sqrt{3} \\ 0 & x - 1 + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 7 + x + \sqrt{3} & 3x - 2 + \sqrt{5} \end{vmatrix} =$$

$$= (x - 1 + \sqrt{3})^2 (3x - 2 + \sqrt{5})$$

$$x_1 = x_2 = 1 - \sqrt{3}, \quad x_3 = \frac{2 - \sqrt{5}}{3}$$

Solución:

$$\mathbf{(x - 1 + \sqrt{3})^2 (3x - 2 + \sqrt{5})}$$

$$\mathbf{x_1 = x_2 = 1 - \sqrt{3}; \quad x_3 = \frac{2 - \sqrt{5}}{3}}$$

40. *Desarrollar el determinante*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -7 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

Transformemos la primera columna en todos sus elementos nulos menos el primero

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & -10 & -7 & -15 \\ 0 & 1 & -6 & 17 \\ 0 & -1 & 8 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & -7 & -15 \\ 1 & -6 & 17 \\ -1 & 8 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -10 & -37 & 25 \\ 1 & 28 & 13 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -37 & 25 \\ 28 & 13 \end{vmatrix} = -1181$$

Solución:

$$+1181$$

41. *Hallar el desarrollo del siguiente determinante*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

Desarrollando por los elementos de la primera fila y primera columna

$$\Delta = 0 - \begin{vmatrix} 0 & a^2 \\ a^2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} c^2 & a^2 \\ b^2 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} c^2 & 0 \\ b^2 & a^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & b^2 \\ b^2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & c^2 \\ b^2 & a^2 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} 0 & c^2 \\ c^2 & 0 \end{vmatrix} = a^4 + b^4 + c^4 - 2\,(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)$$

Solución:

$$\boldsymbol{\Delta = a^4 + b^4 + c^4 - 2\,(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}$$

42. *Calcular el valor del determinante*

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & -b & d \\ -b & -d & 0 & c \\ -c & d & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

Sumando a la segunda fila la primera

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & a & 0 & c+d \\ -b & -d & 0 & c \\ -c & d & 0 & 0 \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} a & a & c+d \\ -b & -d & c \\ -c & d & 0 \end{vmatrix}$$

sumando a la segunda fila, la tercera

$$\Delta = b \begin{vmatrix} a & a & c+d \\ -(b+c) & 0 & c \\ -c & d & 0 \end{vmatrix} = b\,[-d\,(b+c)\,(c+d) - a\,c^2 - a\,c\,d] =$$

$$= b\,(c+d)\,[-b\,d - c\,d - a\,c] = -b\,(c+d)\,(b\,d + c\,d + a\,c)$$

Solución:

$$\boldsymbol{-b(c+d)\ (bd+cd+ac)}$$

43. *Resolver el siguiente sistema*

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ x - y - z &= 2 \\ x - y - 2z &= 1 \\ x + y - 3z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

RESOLUCIÓN:

Como tiene $n+1$ ecuaciones con n incógnitas, deberá verificar la condición de compatibilidad

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

sistema incompatible

Solución:

Incompatible

44. *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\left.\begin{aligned} x+2y-4z &= 3 \\ x-y-z &= -3 \\ x-2y &= -5 \\ 2x+y-5z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Discutiéndolo previamente por el teorema de Rouché.

RESOLUCIÓN:

Veamos el rango de la matriz Δ

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

y como

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \quad \text{es de rango } 2$$

y tomaremos como incógnitas principales la x e y de las dos primeras ecuaciones en que $\Delta_1 = -3 \neq 0$.

Los determinantes característicos son en este caso:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

como ambos determinantes característicos son nulos, según el teorema de Rouché el sistema es COMPATIBLE y queda reducido a sus dos ecuaciones principales (las dos primeras).

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 4z + 3 \\ x - y &= z - 3 \end{aligned}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4z+3 & 2 \\ z-3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 2z - 1; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4z+3 \\ 1 & z-3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = z + 2$$

Solución:

COMPATIBLE (indeterminado)

$$\begin{cases} \mathbf{x = 2z - 1} \\ \mathbf{y = z + 2} \end{cases}$$

45. *Calcular el valor de a para que el siguiente sistema de ecuaciones, admita soluciones no nulas y calcularlas*

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+2y-5z-10t=0 \\ 6x+y-z-5t=0 \\ 3x-y+3z+4t=0 \\ x+2y+z+at=0 \end{array}\right.$$

RESOLUCIÓN:

Es un sistema lineal y homogéneo, y para que admita soluciones no nulas se ha de verificar la condición de compatibilidad

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & -10 \\ 6 & 1 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & 2 & -8 & -2 \\ 9 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & a+8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & -8 & -2 \\ 9 & -7 & -1 \\ 7 & 0 & a+8 \end{vmatrix}=$$

$$=7\begin{vmatrix} -8 & -2 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}+(a+8)\begin{vmatrix} 9 & -8 \\ 9 & -7 \end{vmatrix}=-42+9(a+8)=0\,; \qquad a=-\frac{10}{3}$$

Resolvamos el sistema formado por las tres primeras, tomando como incógnitas

$$\frac{x}{t}, \quad \frac{y}{t}, \quad \frac{z}{t}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3\dfrac{x}{t}+2\dfrac{y}{t}-5\dfrac{z}{t}=10 \\ 6\dfrac{x}{t}+\dfrac{y}{t}-\dfrac{z}{t}=5 \\ 3\dfrac{x}{t}-\dfrac{y}{t}+3\dfrac{z}{t}=-4 \end{array}\right\}$$

$$\Delta=9\,; \quad \Delta_1=3\,; \quad \Delta_2=18\,; \quad \Delta_3=-9$$

las soluciones son

$$x=\frac{t}{3}\,; \quad y=2t\,; \quad z=-t\,; \quad t=t$$

como comprobación podíamos calcular a sustituyendo en la cuarta ecuación

$$\frac{1}{3}+4-1+a=0\,; \qquad a=-\frac{10}{3}$$

Solución:

$$\mathbf{a=-\frac{10}{3}\,; \quad x=\frac{t}{3}\,; \quad y=2t\,; \quad z=-t\,; \quad t=t}$$

46. *Determinar el coeficiente a para que sea compatible el siguiente sistema, y resolverlo*

$$\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ ax+y=1 \\ x-y=a \end{array}\right\}$$

RESOLUCIÓN:

Condición de compatibilidad.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}=a-2a+1-2+1-a^2=0$$

$$a^2+a=0\,; \qquad a=0, \qquad a=-1$$

para $a=0$

$$\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ x-y=0 \end{array}\right\} \qquad x=1\,; \qquad y=1$$

para $a=-1$

$$\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ x-y=-1 \end{array}\right\} \qquad x=\frac{1}{2}\,; \qquad y=\frac{3}{2}$$

Solución:

$$\mathbf{a=0\,; \quad x=1\,; \quad y=1}$$

$$\mathbf{a=-1\,; \quad x=\frac{1}{2}\,; \quad y=\frac{3}{2}}$$

47. *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} \dfrac{x-y+z+1}{2}+\dfrac{x-2y+3z+4}{3}=\dfrac{x-y+z+13}{6} \\[2mm] \dfrac{x+y+z+1}{2}+\dfrac{3x-y+z-3}{4}=\dfrac{x-2y+z-2}{3} \\[2mm] \dfrac{x-y}{5}-\dfrac{z+3}{5}+\dfrac{2(x-y+z)}{3}+\dfrac{z-1}{3}=\dfrac{4x-y+z-4}{15} \end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

Simplificando se obtiene el sistema lineal

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y+4z&=1 \\ 11x+11y+5z&=-5 \\ 9x-12y+11z&=10 \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 11 & 11 & 5 \\ 9 & -12 & 11 \end{vmatrix}=-334; \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -5 & 11 & 5 \\ 10 & -12 & 11 \end{vmatrix}=-334$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 11 & -5 & 5 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 21 & 0 & 25 \\ 31 & 0 & 21 \end{vmatrix}=334;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 11 & 11 & -5 \\ 9 & -12 & 10 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 21 & -4 & 0 \\ 31 & 10 & 0 \end{vmatrix}=334$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=1; \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=-1; \qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=-1$$

Solución:

$$\mathbf{x=1, \quad y=-1, \quad z=-1}$$

48. *Determinar* m *y* n *para que el siguiente sistema de ecuaciones, sea indeterminado*

$$\begin{cases} (4m-n)x+(2m-3n+b)y=2 \\ (8m-3n-a)x+(3m-5n+b)y=1 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN :

Bastará que sus coeficientes sean proporcionales

$$\frac{4m-n}{8m-3n-a}=\frac{2m-3n+b}{3m-5n+b}=2$$

quitando denominadores se obtiene el sistema

$$\left.\begin{aligned} 12m-5n&=2a \\ 4m-7n&=-b \end{aligned}\right\}$$

cuya solución es

$$m=\frac{14a+5b}{64}; \qquad n=\frac{8a+12b}{64}$$

Solución:

$$\mathbf{m=\frac{14a+5b}{64}; \qquad n=\frac{8a+12b}{64}}$$

49. *Dado el sistema de ecuaciones*

$$\left.\begin{aligned} x+y&=-1 \\ y+2z&=9 \\ ax-y+z&=7 \\ ax-2by&=1 \\ x-az&=8 \end{aligned}\right\}$$

Aplicar el teorema de Rouché para determinar a *y* b *que hagan que el sistema sea compatible y determinado, sabiendo que se cumple la condición de que* a *sea un número entero. Resolver el sistema.*

Resolución:

La matriz principal Δ ha de ser de rango 3

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ a & -1 & 1 \\ a & -2b & 0 \\ 1 & 0 & -a \end{bmatrix}$$

formemos el menor principal de tercer orden

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2a$$

que será de característica 3 para $a \neq -\frac{3}{2}$ y como a ha de ser entero Δ es de rango 3 y nos quedamos con las tres primeras ecuaciones. Para que sea determinado también han de ser de rango 3 los dos determinantes orlados; luego han de anularse

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ a & -1 & 1 & 7 \\ a & -2b & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ a & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -a & 8 \end{vmatrix} = 0$$

y desarrollándolos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4ab + 10b - 3 = 0 \\ 5a^2 + 16a + 11 = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ a = -1 ; \quad b = \frac{1}{2} \right.$$

sustituyendo en las tres primeras ecuaciones, se obtiene

$$\left. \begin{array}{r} x + y = -1 \\ y + 2z = 9 \\ -x - y + z = 7 \end{array} \right\}$$

cuyas soluciones $x=2$, $y=-3$, $z=6$ es fácil comprobar que verifican a las dos últimas ecuaciones

Solución:

Determinado para $a = -1$; $b = \frac{1}{2}$

$x = 2$, $y = -3$, $z = 6$

50. *Discutir y resolver según los valores de* m, *el sistema*

$$\left. \begin{array}{r} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{array} \right\}$$

Resolución:

$$\Delta = \begin{bmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \end{bmatrix}$$

calculemos el determinante de Δ

$$\Delta = m^3 - 3m + 2 = 0, \qquad m_1 = m_2 = 1, \qquad m_3 = -2$$

1.° Para valores de m distintos de 1 y -2 el rango de Δ es 2, sistema *compatible y determinado*, $x = y = z = \frac{1}{m+2}$.

2.° Para $m=1$, Δ y Λ tienen de rango 1 el sistema es *compatible e indeterminado*, $x = 1 - y - z$.

3.° Para $m = -2$; Δ es de característica 2 y Λ de 3 luego es *incompatible*.

Solución:

1.° m distinto de 1, y de -2 compatible y determinado

$x = y = z = \frac{1}{m+2}$

2.° $m = 1$, compatible e indeterminado $x = 1 - y - z$

3.° $m = -2$, absurdo o incompatible.

2 *Límites*

II

LIMITES

51. *Hallar el límite cuando* n→∞ *de la expresión*

$$\sqrt{n^2+an+b}-\sqrt{n^2+a'n+b'}$$

RESOLUCIÓN:

Multiplicando y dividiendo por la conjugada

$$\sqrt{n^2+an+b}-\sqrt{n^2+a'n+b'}=\frac{(a-a')n+(b-b')}{\sqrt{n^2+an+b}+\sqrt{n^2+a'n+b'}}=$$

$$=\frac{(a-a')+\dfrac{b-b'}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{a'}{n}+\dfrac{b'}{n^2}}}$$

y cuando $n\to\infty$, queda

$$\frac{a-a'}{2}$$

Solución:

$$\mathbf{\frac{a-a'}{2}}$$

52. *Calcular*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$$

RESOLUCIÓN:

podemos escribir el numerador así: $(n-1)+2$

$$\lim\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n=\lim\left[1+\frac{2}{n-1}\right]^n=e^2$$

Solución:

$$\mathbf{e^2}$$

53. *Hallar*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt[n]{n}-1)}{l\,n}$$

RESOLUCIÓN:

Hagamos

$$\sqrt[n]{n}-1=x$$

de donde

$$\sqrt[n]{n}=1+x;\qquad \frac{1}{n}\cdot l\,n = l(1+x)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)}{l\,n}=\lim_{x\to0}\frac{x}{l(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{l(1+x)^{1/x}}=\frac{1}{l\,e}=1$$

Solución:

1

54. *Calcular el límite de*

$$\frac{n^\alpha+3n-1}{2n^3+3n^2-2}$$

cuando n→∞ *según los valores que puede tomar* α.

RESOLUCIÓN:

Dividiendo numerador y denominador por n^3

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-3}+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{2+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-3}}{2}$$

para $\alpha>3$, $\alpha-3$ es positivo, $\lim \frac{n^{\alpha-3}}{2} \longrightarrow \infty$

para $\alpha=3$ $\frac{n^{\alpha-3}}{2}=\frac{1}{2}$, $\lim=\frac{1}{2}$

para $\alpha<3$, $\alpha-3$ es negativo, $\lim\frac{1}{2\,n^{3-\alpha}}=0$

Solución:

para $\alpha>3$, $\to\infty$

para $\alpha=3$, $\frac{1}{2}$

para $\alpha<3$, 0

55. *Calcular*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)^{4n}}{\left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}4\lambda^3\right)^n}$$

RESOLUCIÓN:

Sabemos que la suma de los cubos de los n primeros números enteros es

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\lambda^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

luego

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)^{4n}}{\left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}4\lambda^3\right)^n}=\lim\frac{(1+n)^{4n}}{[n^2(n+1)^2]^n}=\lim\left(\frac{1+n}{n}\right)^{2n}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=e^2$$

Solución:

e^2

56. *Calcular el límite de*

$$\sqrt[n]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}}$$

cuando n→∞.

RESOLUCIÓN :

Llamemos a_n a la cantidad subradical

$$a_n = \binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\cdots\binom{n}{n} = \frac{(n!)^{n+1}}{(1!\,2!\,3!\ldots n!)^2}$$

aplicando el criterio de Cauchy,

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim \frac{n^n}{n!} \longrightarrow \infty$$

Solución:

No tiene límite

57. *Determinar α para que tenga límite cuando $n \to \infty$ la expresión siguiente, y hallar dicho límite*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(n-i+1)(i+2)}{\alpha\, n^2 (n+1)} \right\}^{4n}$$

RESOLUCIÓN :

Como el denominador no depende de i, hagamos la suma del numerador en función de n y luego haremos que $n \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{i=n} (n-i+1)(i+2) = \sum_{i=1}^{i=n} [2(n+1) + (n-1)\,i - i^2] =$$

$$= 2n(n+1) + (n-1)\sum_1^n i - \sum_1^n i^2$$

pero sabemos que

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}; \qquad \sum_{i=1}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

luego

$$\sum_{i=1}^{i=n} (n-i+1)(i+2) = 2n(n+1) + (n-1)\frac{n(n+1)}{2} -$$

$$- \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+8)}{6}$$

llevando este valor a la expresión dada

$$\left[\frac{(n+8)}{6\,\alpha\, n} \right]^{4n}$$

para que esta expresión tenga límite, el corchete ha de tender hacia 1 cuando $n \to \infty$, luego $6\alpha = 1$, $\alpha = \frac{1}{6}$ obteniéndose

$$\left[\frac{n+8}{n} \right]^{4n} = \left[1 + \frac{8}{n} \right]^{4n}$$

y haciendo

$$\frac{8}{n} = \frac{1}{m}; \qquad \lim_{m\to\infty} \left[1 + \frac{1}{m} \right]^{32m} = e^{32}$$

Solución:

para $\alpha = \dfrac{1}{6}$; **lim** $= e^{32}$

58. *Calcular el límite de*

$$\left(\frac{n+a}{n+1} \right)^{2n+3}_{n\to\infty}$$

RESOLUCIÓN :

efectuando la división : $\dfrac{n+a}{n+1} = 1 + \dfrac{a-1}{n+1}$

$$\left(\frac{n+a}{n+1} \right)^{2n+3} = \left(1 + \frac{a-1}{n+1} \right)^{2(n+1)+1} = \left(1 + \frac{a-1}{n+1} \right)^{2(a-1)\frac{n+1}{a-1}} \cdot \left(1 + \frac{a-1}{n+1} \right)$$

el segundo factor vale uno cuando $n \to \infty$, quedando

$$\lim \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{a-1}} \right)^{\frac{n+1}{a-1}} \right]^{2(a-1)}_{n\to\infty} = e^{2(a-1)}$$

Solución:

$$\mathbf{e^{2(a-1)}}$$

59. *Calcular el límite de*

$$\left(\frac{n^2+3}{n^2+4n}\right)^{\frac{n^2-1}{n}}_{n\to\infty}$$

RESOLUCIÓN :

$$\frac{n^2+3}{n^2+4n} = 1 - \frac{4n-3}{n^2+4n} \quad \text{para} \quad n > \text{A}, \quad 1 - \frac{4}{n}$$

$$\frac{n^2-1}{n} = n - \frac{1}{n} \quad \text{»} \quad n > \text{A}, \quad n$$

luego

$$\lim\left(\frac{n^2+3}{n^2+4n}\right)^{\frac{n^2-1}{n}}_{n\to\infty} = \lim\left(1-\frac{4}{n}\right)^n_{n\to\infty} = e^{-4}$$

Solución:

$$\mathbf{e^{-4}}$$

60. *Hallar el límite de*

$$\frac{2x^2-5+\sqrt{x^4-3x+1}}{x-1+\sqrt[3]{8x^6+3x-2}}$$

cuando x *aumenta indefinidamente.*

RESOLUCIÓN :

Dividiendo numerador y denominador por x^2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x^2}+\sqrt{1-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\sqrt[3]{8+\frac{3}{x^5}-\frac{2}{x^6}}} = \frac{3}{2}$$

Solución:

$$\mathbf{\frac{3}{2}}$$

61. *Calcular el límite del producto*

$$\text{P}_n = \frac{1}{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[9]{a^4}\cdot\sqrt[27]{a^8}\cdot\ldots\cdot\sqrt[3^n]{a^{2n}}$$

RESOLUCIÓN :

Tomando logaritmos

$$l\,\text{P}_n = -\,l\,a + l\,a\left[\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

el corchete es una progresión geométrica decreciente y para $n\to\infty$ vale

$$\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2$$

luego

$$\lim_{n\to\infty}(l\,\text{P}_n) = -\,l\,a + 2\,l\,a = l\,a$$

$$\lim \text{P}_n = a$$

Solución:

$$\mathbf{a}$$

62. *Hallar el límite, cuando* $n\to\infty$, *de*

$$\frac{l(1+n\,a)}{n}$$

RESOLUCIÓN :

aplicando el criterio de Stolz

$$\lim\frac{a_n}{b_n} = \lim\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim\frac{l\left(\frac{1+(n+1)a}{1+n\,a}\right)}{n+1-n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} l\,\frac{n\,a+(a+1)}{n\,a+1} = l\,1 = 0$$

Solución:

$$\mathbf{0}$$

63. *Siendo*

$$a_n = \frac{n^n}{n!}$$

calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

RESOLUCIÓN:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{\underline{|n+1}} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left[1+\frac{1}{n}\right]^n = e$$

Solución:

e

64. *Calcular para* n→∞ *el límite de*

$$\left(\cos\frac{a}{n} + x \operatorname{sen}\frac{a}{n}\right)^n$$

RESOLUCIÓN:

Sabemos que para $n\to\infty$

$$\cos\frac{a}{n} \longrightarrow 1, \qquad \operatorname{sen}\frac{a}{n} \longrightarrow \frac{a}{n}$$

luego

$$\lim\left(1+\frac{x\,a}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{x\,a}{n}\right)^{x\,a\cdot\frac{n}{x\,a}} = \lim\left[\left(1+\frac{x\,a}{n}\right)^{\frac{n}{x\,a}}\right]^{x\,a} = e^{a\,x}$$

Solución:

$$e^{a\,x}$$

65. *Definida la sucesión* a_n *por*

$$a_1 = \sqrt{a}\,; \quad a_2 = \sqrt{a+a_1}\,; \quad a_3 = \sqrt{a+a_2}\,; \quad \ldots; \quad a_n = \sqrt{a+a_{n-1}}$$

siendo a *un número real y positivo, demostrar que* a_n *tiene límite cuando* n→∞, *y hallar dicho límite.*

RESOLUCIÓN:

Vemos que la sucesión es monótona creciente y demostremos que es acotada superiormente. En efecto

$a_1 < \sqrt{a}+1$ supongamos que también $a_{n-1} < \sqrt{a}+1$ y veamos que también lo verifica a_n

$$a_n = \sqrt{a+a_{n-1}} < \sqrt{a+\sqrt{a}+1} < \sqrt{a+2\sqrt{a}+1} < \sqrt{a}+1$$

luego es acotada y por lo tanto tiene límite

$$\lim a_{n-1} = \lim_{n\to\infty} a_n = x$$

y podremos escribir

$$x = \sqrt{a+x}\,; \qquad x^2 - x - a = 0\,; \qquad x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

Solución:

$$\mathbf{\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}}$$

66. *Hallar el límite cuando* n→∞ *de la expresión*

$$\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}}$$

RESOLUCIÓN:

Calculemos por separado el numerador y el denominador

Numerador. Es la suma de los cubos de los n primeros números y vale

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Denominador.

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\binom{n}{4} =$$

$$= n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} =$$

$$= \frac{n}{24}\left[24 + 12(n-1) + 4(n^2-3n+2) + n^3 - 6n^2 + 11n - 6\right] =$$

$$= \frac{n}{24}\left[n^3 - 2n^2 + 11n + 14\right] = \frac{n(n+1)}{24}(n^2-3n+14)$$

tendremos al sustituir

$$\lim_{n \to \infty} 6 \frac{n(n+1)}{n^2 - 3n + 14} = 6$$

Solución:

6

67. *Se dan dos números a y b (a<b) y formamos la siguiente sucesión*

$$a, \; b, \; a_1, \; a_2, \; a_3, \; \ldots, \; a_n, \; \ldots$$

en la que cada término es la media aritmética de los dos que le preceden. Se pide:

1.° *Demostrar que existe el lim a_n cuando $n \to \infty$.*

2.° *Calcular dicho límite.*

RESOLUCIÓN:

Sabemos que la media aritmética de dos números, está comprendida entre ambos, y aplicando reiteradamente esta propiedad podremos escribir

$$a < a_1 < a_3 < a_5 < \ldots < a_{2n-1} < \ldots < a_{2n} < \ldots < a_4 < a_2 < b$$

para demostrar que éstas dos sucesiones monótonas tienen el mismo límite hay que demostrar que son «contiguas», es decir, que

$$\lim_{n \to \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$$

En efecto

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) = \frac{1}{2^2}(a_{n-1} - a_{n-2}) = \ldots = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}(b-a) \to 0$$

probada la existencia del límite vamos a calcularlo.

De la ley de recurrencia del enunciado, podemos escribir

$$2a_1 = a + b; \quad 2a_2 = a_1 + b; \quad 2a_3 = a_2 + a_1 \ldots 2a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

y sumándolas miembro a miembro, obtenemos

$$a_{n-1} + 2a_n = a + 2b$$

y como

$$\lim a_{n-1} = \lim a_n = x \qquad 3x = a + 2b; \qquad x = \frac{a+2b}{3}$$

Solución:

$$\mathbf{\frac{a+2b}{3}}$$

68. *Hallar el límite de una sucesión que comienza por dos números positivos a y b, en la que cada elemento es media geométrica de las dos anteriores.*

RESOLUCIÓN:

Por la propiedad de que la media geométrica está comprendida entre los dos números, fácil es demostrar que constituyen dos sucesiones acotadas y contiguas

$$a < u_1 < u_3 < \ldots < u_{2n-1} < \ldots < u_{2n} < \ldots < u_4 < u_2 < b$$

Por definición

$$u_1 = \sqrt{ab}, \quad u_2 = \sqrt{bu_1}, \quad u_3 = \sqrt{u_1 u_2} \ldots u_n = \sqrt{u_{n-1} u_{n-2}}$$

y multiplicando miembro a miembro y simplificando

$$\sqrt{u_{n-1}} \cdot u_n = \sqrt{a \cdot b}$$

y como la sucesión tiene límite

$$\lim u_n = \lim u_{n-1} = x$$

$$x\sqrt{x} = \sqrt{a \cdot b}, \quad x^3 = ab^2, \quad x = \sqrt[3]{ab^2}$$

Solución:

$$\sqrt[3]{\mathbf{ab^2}}$$

69. *Si S_n designa la media aritmética de los productos de todos los pares de enteros consecutivos cuya suma es* n, *calcular*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^2}$$

RESOLUCIÓN:

a) Para $n = \text{par}$

$$S_n = \frac{0 \cdot n + 1(n-1) + 2(n-2) + \ldots + \frac{n}{2}\left(n - \frac{n}{2}\right)}{\frac{n}{2} + 1} =$$

$$= \frac{2}{n+1}\left[n\left(1+2+3+\ldots+\frac{n}{2}\right)\right] - \left[1^2+2^2+3^2+\ldots+\left(\frac{n}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{2}{n+1}\left[\frac{n^2(n+2)}{8} - \frac{n(n+1)(n+2)}{24}\right]$$

$$\lim \frac{S_n}{n^2} = 2\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right) = \frac{1}{6}$$

b) Para $n = \text{impar}$

$$S_n = \frac{2}{n+1}\left[\frac{n(n+3)(n-1)}{8} - \frac{\frac{(n-1)}{2}\,\frac{(n+1)}{2}\,n}{6}\right]$$

$$\lim \frac{S_n}{n^2} = 2\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right) = \frac{1}{6}$$

Solución:

$$\mathbf{\frac{1}{6}}$$

70. *Calcular sin emplear derivadas*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$$

RESOLUCIÓN:

Haciendo $\frac{1}{n} = t$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n = \lim_{t\to 0}\left(\frac{a^t + b^t}{2}\right)^{\frac{1}{t}}$$

hagamos el cambio

$$\frac{a^t + b^t}{2} = 1 + tx \qquad [1]$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{a^t + b^t}{2}\right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{tx\to 0}(1+tx)^{\frac{1}{tx}\cdot x} = e^x \qquad [2]$$

calcularemos x de (1)

$$x = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{a^t + b^t}{2} - 1\right] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\left[\frac{a^t - 1}{t} + \frac{b^t - 1}{t}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(la + lb) = l\sqrt{ab}$$

que llevamos a (2)

$$\lim\left[\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right]^n = e^{l\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$$

Solución:

$$\mathbf{\sqrt{ab}}$$

71. *Hallar el límite para* $n \to \infty$ *de la expresión*

$$\frac{l\,n!}{l\,n^n}$$

RESOLUCIÓN:

Aplicando el criterio de Stolz

$$\lim \frac{l\,n!}{l\,n^n} = \lim \frac{l\,n! - l\,(n-1)!}{l\,n^n - l\,(n-1)^{n-1}} = \lim \frac{l\,n}{n\,l\,n - (n-1)\,l\,(n-1)} =$$

$$= \lim \frac{l\,n}{(n-1)\,l\,n + l\,n - (n-1)\,l\,(n-1)} = \lim \frac{l\,n}{(n-1)\,l\left(\frac{n}{n-1}\right) + l\,n} =$$

$$= \lim \frac{l\,n}{l\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} + l\,n} = \lim \frac{l\,n}{l\,n + l\,e} = 1$$

Solución:

1

72. *Hallar el límite*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x \left(1+\frac{2}{n}\right)^x \left(1+\frac{3}{n}\right)^x \cdots \left(1+\frac{n}{n}\right)^x}$$

RESOLUCIÓN:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+n)}{n^n}\right]^{\frac{x}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2\,n)!}{n!\,n^n}\right]^{\frac{x}{n}}$$

y aplicando la fórmula de Stirling

$$\lim_{n\to\infty} n! = \lim \sqrt{2\,\pi\,n}\cdot n^n \cdot e^{-n}$$

sustituyendo

$$= \lim \left[\frac{2\sqrt{\pi\,n}\,(2\,n)^{2n}\,e^{-2n}}{\sqrt{2\,\pi\,n}\;n^n\,e^{-n}\cdot n^n}\right]^{\frac{x}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2\cdot 2^n \cdot e^{-n}}{\sqrt{2}}\right]^{\frac{x}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{x}{2n}} \cdot 2^{2\,x}\cdot e^{-x} = 4^x\,e^{-x} = \left[\frac{4}{e}\right]^x$$

Solución:

$$\left[\frac{4}{e}\right]^x$$

73. *Calcular el límite para* $n\to\infty$ *de*

$$\frac{1}{n^2}\left[2 + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \ldots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right]$$

RESOLUCIÓN:

Aplicando el criterio de Stolz

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim \frac{\dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2 - (n-1)^2} = \lim \frac{\dfrac{(n+1)^{n-1}(n+1)}{n^{n-1}}}{2\,n-1} =$$

$$= \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{n+1}{2\,n-1} = \lim \frac{n+1}{2\,n-1}\cdot\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\cdot e$$

Solución:

$$\frac{e}{2}$$

74. *Hallar los límites a la derecha y a la izquierda de la función*

$$y = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1}$$

cuando $x \to \frac{\pi}{2}$.

RESOLUCIÓN:

Podemos escribir:

$$y = 1 + \frac{2}{\operatorname{tg} x - 1}$$

$$\text{para}\quad x = \frac{\pi}{2} - \varepsilon \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} - \varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} +\infty\,; \qquad \lim y = 1$$

$$\text{para}\quad x = \frac{\pi}{2} + \varepsilon \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} + \varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} -\infty\,; \qquad \lim y = 1$$

como en ambos sentidos el límite es el mismo podemos escribir

$$\lim y = 1\,, \qquad \text{cuando} \quad x \to \frac{\pi}{2}$$

Más sencillo, si observamos que

$$y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

y para

$$x = \frac{\pi}{2} \pm \varepsilon$$

$$\lim y = \lim -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon + \frac{\pi}{4}\right) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} \pm \varepsilon\right) = 1$$

Solución:

lim y = 1

75. *Hallar los límites a la derecha y a la izquierda de*

$$y = \operatorname{Arg\,Th}\,(\operatorname{tg} x)$$

cuando $x \to \dfrac{\pi}{2}$.

Resolución:

$$y = \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{-\operatorname{tg} x}}{e^{\operatorname{tg} x} + e^{-\operatorname{tg} x}} = \frac{e^{2\operatorname{tg} x} - 1}{e^{2\operatorname{tg} x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2\operatorname{tg} x} + 1}$$

veamos el denominador

$x = \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon$ (por la izquierda) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \to +\infty$ $\quad \lim y = 1$

$x = \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon$ (por la derecha) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \to -\infty$ $\quad \lim y = 1$

luego podemos decir

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{Arg\,Th}\,(\operatorname{tg} x) = 1$$

Solución:

lim y (a la derecha) = lim y (a la izquierda) = 1

para $x \to \dfrac{\pi}{2}$.

76. *Hallar los límites a la derecha y a la izquierda de la función*

$$y = \frac{e^{\operatorname{tg} x} + 2}{e^{\operatorname{tg} x} - 2}$$

cuando $x \to \dfrac{\pi}{2}$.

Resolución:

1.° A la derecha, para $x = \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon$; $\quad \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \to -\infty$

2.° A la izquierda, para $x = \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon$; $\quad \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon\right)_{\varepsilon \to 0} \to \infty$

luego sustituyendo en la expresión dada

lim y (a la derecha) = −1

lim y (a la izquierda) = 1

Solución:

para $x \to \dfrac{\pi}{2}$ **por la derecha lim y = −1**

para $x \to \dfrac{\pi}{2}$ **por la izquierda lim y = 1**

77. *Hallar los límites por la derecha y por la izquierda de la función*

$$y = e^{\frac{1}{x-2}}$$

para $x \to 2$.

Resolución:

para $x = 2 - \varepsilon$ (por la izquierda) $\lim y = \lim e^{\frac{1}{-\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{\varepsilon}}} \to 0$

para $x = 2 + \varepsilon$ (por la derecha) $\lim y = \lim_{\varepsilon \to 0} e^{\frac{1}{\varepsilon}} \to \infty$

Solución:

(por la izquierda) lim y = 0 para x = 2

(por la derecha) no tiene límite para x = 2

78. *Averiguar si tiene límite la función*

$$z = \frac{l(x+1) + l(y+1)}{x+y}$$

cuando x e y tienden hacia cero, y en caso afirmativo, hallar dicho límite.

RESOLUCIÓN:

Hagamos tender x e y hacia cero, según una dirección cualquiera

$$y = mx$$

$$z = \lim_{x\to 0} \frac{l(x+1) + l(mx+1)}{(1+m)\,x} = [\text{aplicando L'Hoppital}] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{m}{mx+1}}{1+m} = \frac{1+m}{1+m} = 1$$

al ser el límite independiente de la dirección m, existe el límite y dicho límite vale 1.

Solución:

1

79. *Calcular cuando* $n\to\infty$ *el límite del producto siguiente:*

$$P = \cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2^2}\cdot\cos\frac{a}{2^3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{a}{2^n}$$

RESOLUCIÓN:

Sustituyendo $\cos a = \dfrac{\operatorname{sen} 2a}{2\operatorname{sen} a}$

$$P = \frac{\operatorname{sen} a}{2\operatorname{sen}\dfrac{a}{2}}\cdot\frac{\operatorname{sen}\dfrac{a}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{a}{2^2}}\cdot\frac{\operatorname{sen}\dfrac{a}{2^2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{a}{2^3}}\cdots\frac{\operatorname{sen}\dfrac{a}{2^{n-1}}}{2\operatorname{sen}\dfrac{a}{2^n}} =$$

$$\frac{\operatorname{sen} a}{2^n\operatorname{sen}\dfrac{a}{2^n}} = \operatorname{sen} a\cdot\frac{1}{a\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{a}{2^n}}{\dfrac{a}{2^n}}}$$

y como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\dfrac{a}{2^n}}{\dfrac{a}{2^n}} = 1, \quad \lim P = \frac{\operatorname{sen} a}{a}$$

Solución:

$$\lim P = \frac{\operatorname{sen} a}{a}$$

80. *Límite cuando* $n\to\infty$ *del producto*

$$\prod_{i=1}^{i=n}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{a}{2^i}\right)$$

RESOLUCIÓN:

Sabemos que

$$\cos 2x = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = (1-\operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x$$

de donde,

$$1 - \operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}$$

y sustituyendo en el producto dado

$$\prod_{i=1}^{i=n}\frac{\cos a}{\cos^2\dfrac{a}{2}}\cdot\frac{\cos\dfrac{a}{2}}{\cos^2\dfrac{a}{2^2}}\cdot\frac{\cos\dfrac{a}{4}}{\cos^2\dfrac{a}{2^3}},\ldots,\frac{\cos\dfrac{a}{2^{n-1}}}{\cos\dfrac{a}{2^n}} = \frac{\cos a}{\cos\dfrac{a}{2}\cdot\cos\dfrac{a}{2^2}\ldots\cos\dfrac{a}{2^n}}$$

y teniendo en cuenta el problema anterior

$$\lim_{x\to\infty} \prod_{i=1}^{i=n} = \frac{\cos a}{\frac{\operatorname{sen} a}{a}} = \frac{a}{\operatorname{tg} a}$$

Solución:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{tg\ a}}$$

3 *Series numéricas y potenciales - Sumación de series - Métodos elementales de desarrollo en serie*

Recomendamos que se amplíen éstos problemas con los del Capítulo 7.°, II.ª Parte de este mismo libro.

III

SERIES NUMERICAS Y POTENCIALES - SUMACION DE SERIES - METODOS ELEMENTALES DE DESARROLLO EN SERIE

81. *Estudiar la convergencia de las series*

$$\Sigma_1 = \operatorname{sen} 2 + 4 \operatorname{sen}^2 1 + 27 \operatorname{sen}^3 \frac{2}{3} + \ldots + n^n \operatorname{sen}^n \frac{2}{n} + \ldots$$

$$\Sigma_2 = \frac{3}{2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1} + \frac{9}{4 \operatorname{arc} \operatorname{tg}^2 2} + \frac{27}{8 \operatorname{arc} \operatorname{tg}^3 3} + \ldots + \frac{3^n}{2^n \operatorname{arc} \operatorname{tg}^n n} + \ldots$$

RESOLUCIÓN:

1.ª Como

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim n \cdot \operatorname{sen} \frac{2}{n} = \lim 2 \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} = 2 > 1$$

la serie es DIVERGENTE.

2.ª Como

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} n} = \frac{3}{\pi} < 1$$

la serie es CONVERGENTE

Solución:

Σ_1, divergente; Σ_2, convergente

82. *Etudio de las series*

$$\Sigma_1 = \frac{1}{3} + \frac{2!}{3 \cdot 5} + \frac{3!}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots + \frac{n!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)}$$

$$\Sigma_2 = \log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \ldots + \log \frac{n+1}{n} + \ldots$$

Resolución:

1.º Aplicando el criterio de D'Alembert

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{convergente}$$

2.º Aplicando el criterio de Pringheim

$$\lim n\,u_n = \lim \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \log e > 1 \quad \text{divergente}$$

Solución:

Σ_1, **convergente**

Σ_2, **divergente**

83. *Estudio de las series*

$$\Sigma_1 = (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\ldots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\ldots$$

$$\Sigma_2 = \frac{n^2}{n!}$$

Resolución:

1.º $u_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$$\lim n\,u_n = \lim \frac{n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to \infty \quad \text{divergente}$$

también podemos ver fácilmente que

$$S_n = \sqrt{n+1}-1 \quad \text{que tiende a } a \to \infty \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

2.º Apliquemos D'Alembert

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \lim \frac{(n+1)}{n^2} \to 0 < 1 \quad \text{convergente}$$

Solución:

Σ_1, **divergente**

Σ_2, **convergente**

84. *Estudiar la convergencia de la serie*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Resolución:

$$\lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0$$

la serie es DIVERGENTE

Solución:

DIVERGENTE

85. *Estudio de la convergencia de las series*

$$\Sigma_1 = 1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots$$

$$\Sigma_2 = 1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}+\ldots$$

Resolución:

1.º Los términos de la serie dada son respectivamente mayores que los de la serie armónica, luego la serie dada es DIVERGENTE.

2.º Serie de signos alternos, cada término es menor que el anterior y $\lim u_n = 0$, luego la serie es CONVERGENTE.

Solución:

Σ_1, **es divergente**

Σ_2, **es convergente**

86. *Análisis de la serie*

$$\sum \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n^3+1}$$

RESOLUCIÓN :

Aplicando el criterio de Pringheim

$$\lim n^\alpha u_n = \lim \sqrt[3]{\frac{n^{3\alpha+1}+2n^{3\alpha}}{n^9+3n^6+3n^3+1}} = k \quad \text{para} \quad \alpha = \frac{8}{3} > 1 \quad \text{convergente}$$

Solución:

CONVERGENTE

87. *Análisis de la serie*

$$\sum_1^\infty \frac{n+1}{\sqrt{n}}$$

RESOLUCIÓN :

La serie dada es «mayorante» de la

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$$

pero

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

del tipo de la serie de Rieman $\sum_1^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ que por ser $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ es divergente, luego la serie dada con mayor razón es divergente.

Se ve más fácilmente viendo que $\lim u_n \to \infty$.

Solución:

DIVERGENTE

88. *Estudiar la serie cuyo término general es*

$$u_n = \left[l\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right]^\alpha$$

RESOLUCIÓN :

El término general u_n lo podemos escribir así :

$$u_n = \left[l\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right]^\alpha = \left[l\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\right]^\alpha$$

comparemos la serie dada con la de término general $v_n = \left(\frac{2}{n-1}\right)^\alpha$

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\left[l\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\right]^\alpha}{\left(\frac{2}{n-1}\right)^\alpha} = \left[l\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^\alpha \to (le)^\alpha = 1$$

luego la serie dada es convergente al mismo tiempo que la V_n que vamos a estudiar

$$\Sigma v_n = \frac{2^\alpha}{1^\alpha} + \frac{2^\alpha}{2^\alpha} + \frac{2^\alpha}{3^\alpha} + \ldots = 2^\alpha \left[\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots\right]$$

el paréntesis es la serie de Rieman, luego

Solución:

$\alpha > 1$ **Convergente**

$\alpha \leq 1$ **Divergente**

89. *Estudio de las series*

$$\Sigma_1 = \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \ldots$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \ldots$$

RESOLUCIÓN:

1.ª Aplicando el criterio de D'Alembert

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n(2n+2)} \cdot \frac{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)} =$$

$$= \lim \frac{2n+1}{2n+2} = 1 \qquad \text{(dudosa)}$$

Aplicando el criterio de Raabe ya que antes del límite, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

$$\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{1+\alpha}; \qquad \lim n\,\alpha = \lim \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \qquad \textit{divergente}$$

2.ª Como

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{n-1}$$

podemos agrupar cada dos términos y se obtiene

$$\Sigma_2 = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \ldots\right)$$

que es la serie armónica luego es *divergente*

Solución:

Σ_1, Divergente

Σ_2, Divergente

90. *Demostrar que si la serie de términos positivos*

$$\sum_{1}^{\infty} u_n$$

es convergente, tamién lo es la serie

$$\sum_{1}^{\infty} u_n^{\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

RESOLUCIÓN:

Por hipótesis la serie dada es convergente luego $\sqrt[n]{u_n} < 1$. La serie pretendida está formado por los productos de los términos de Σu_n por los de la sucesión acotada

$$u_1, \quad \sqrt{u_2}, \quad \sqrt[3]{u_3}, \ldots, \sqrt[n]{u_n}$$

luego la serie resultante será convergente

Solución:

Es convergente

91. *Análisis de la serie*

$$\Sigma \frac{nx^n}{n^2+1}$$

RESOLUCIÓN:

Apliquemos el criterio de D'Alembert

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(n+1)}{n^2+2n+2} \cdot \frac{n^2+1}{n} \cdot x = x; \qquad |x| < 1 \quad \text{convergente}$$

Para $x = 1$, $\lim n \cdot u_n = \lim \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \neq 0$ divergente

Para $x = -1$, serie alternada $\lim u_n = 0$ convergente

Solución:

Convergente para $-1 \leq x < 1$

92. *Estudio de las series*

a) $\Sigma\, nx^n$; b) $\Sigma \frac{x^n}{\sqrt{n}}$; c) $\Sigma \frac{x^n}{n^n}$

RESOLUCIÓN:

a) Aplicaremos D'Alembert

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{n+1}{n} x = x ; \qquad |x| < 1 \quad \textbf{convergente}$$

$$\text{para } x = 1 \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \qquad \text{es divergente}$$

$$\text{para } x = -1 \quad \lim u_n \neq 0 \quad \text{es divergente}$$

b) Apliquemos D'Alembert

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \sqrt{\frac{n}{n+1}}\, x = x \qquad |x| < 1 \quad \text{convergente}$$

$$\text{para } x = 1 \quad \lim n u_n = \lim \sqrt{n} \to \infty \quad \text{divergente}$$

c) Aplicaremos el criterio de Cauchy

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{x}{n} \to 0 \qquad \text{convergente}$$

Solución:

a) Convergente para $-1<x<1$
b) » » $-1<x<1$
c) » » cualquier valor de x

93. *Estudio de la serie*

$$\Sigma u_n = \Sigma \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n^2+n+1}$$

RESOLUCIÓN:

$$u_n = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{n^2+n+1} \to 0$$

aplicando Pringheim

$$\lim u_n \cdot n^{\alpha} = \lim \frac{n^{\alpha}}{n^2+n+1} = k \qquad \alpha = 2 > 1 \qquad \text{convergente}$$

Solución:

Convergente

94. *Estudio de la serie*

$$\frac{i}{1} + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} + \frac{i^4}{4} + \frac{i^5}{5} + \ldots$$

RESOLUCIÓN:

Agrupando partes reales e imaginarias

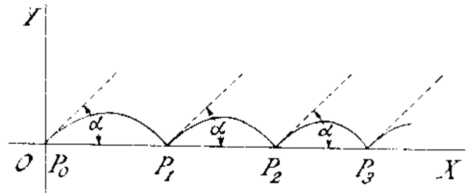
$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \ldots\right) + i\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots\right)$$

las dos series de los paréntesis son decrecientes y de signos alternos y además $\lim \frac{1}{2n} = 0$; $\lim \frac{1}{2n-1} = 0$, luego son convergentes y por lo tanto la serie dada también.

Solución:

Convergente

95. *Se lanza una pelota desde el origen de coordenadas con una velocidad inicial v_0 formando una ángulo α con la horizontal y bota en los puntos $P_1(x_1, 0)$, $P_2(x_2, 0)$, ..., $P_n(x_n, 0)$, siempre bajo*



un mismo ángulo (ver la figura adjunta). Las velocidades iniciales v_0, v_1, v_2, ..., en los sucesivos rebotes decrecen con la ley

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{v_2}{v_1} = \ldots = \frac{v_{n-1}}{v_n} = c < 1$$

Determinar x_n y lim x_n (prescindiendo de la resistencia del aire). Nota: Se sabe que la trayectoria parabólica de un móvil que sale del origen con velocidad inicial v_0 y formando un ángulo α con la horizontal, es

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

RESOLUCIÓN:

La $(n+1)$— ésima parábola, del rebote iniciado en el punto $(x_n, 0)$ con velocidad v_n y ángulo α es:

$$y = (x - x_n) \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g (x - x_n)^2}{2 v_n^2 \cos^2 \alpha}$$

que cortará el eje OX en x_{n+1}, haciendo $y=0$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{v_n^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} \; ; \qquad x_{n+1} = x_n + \frac{v_n^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} \qquad [1]$$

según (1) las abscisas de los sucesivos rebotes son:

$$x_1 = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{g} \cdot v_0^2 ; \qquad x_2 = x_1 + \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{g} v_1^2 = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{g} (v_0^2 + v_1^2) \dots$$

$$x_n = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{g} (v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \dots + v^2_{n-1})$$

el paréntesis es una progresión geométrica de razón $c^2 < 1$

$$x_n = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{g} v_0^2 (1 + c^2 + c^4 + \dots + c^{2(n-1)}) = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{g} v_0^2 \frac{c^{2n} - 1}{c^2 - 1}$$

$$x_n = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{g} v_0^2 \frac{1 - c^{2n}}{1 - c^2}$$

cuando $n \to \infty$, como $c < 1$, se obtiene

$$\lim x_n = \frac{v_0^2 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha}{g(1 - c^2)}$$

Solución:

$$\mathbf{x_n = \frac{v_0^2 \cdot sen\, 2\alpha}{g} \cdot \frac{1 - c^{2n}}{1 - c^2}}$$

$$\mathbf{\lim_{n \to \infty} x_n = \frac{v_0^2 \cdot sen\, 2\alpha}{g(1 - c)^2}}$$

96. *Análisis y suma de la serie*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

RESOLUCIÓN:

Criterio de Pringheim

$$\lim n^\alpha \cdot u_n = \lim \frac{n^\alpha}{n(n+1)} \; ; \qquad \alpha = 2 > 1 \quad \text{convergente}$$

descomponemos el término general

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

dando valores a $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \\ - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \quad \dots \end{aligned} \right\} = 1$$

Solución:

Convergente

S = 1

97. *Sumar la serie numérica convergente*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

RESOLUCIÓN :

Es una serie de Stirling, cuya descomposición del término general hacemos directamente

$$u_n = \frac{1}{[(n+3)] - n}\left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$$

$$S = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}\cdots\right] = \frac{1}{18}$$

Solución:

$$\mathbf{\frac{1}{18}}$$

98. *Análisis y suma de la serie*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{3n-1}{n(n+1)(n+2)}$$

RESOLUCIÓN :

Apliquemos el criterio de D'Alembert

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{3n^2+2n}{3n^2+8n-3} = 1 \quad \text{dudosa}$$

aplicamos Raabe

$$\frac{3n^2+2n}{3n^2+8n-3} = \frac{1}{1+\alpha}, \qquad \lim n\alpha = 2 > 1 \quad \text{convergente}$$

descomponemos el término general

$$\frac{3n-1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2};$$

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = 4; \quad C = -\frac{7}{2}$$

$$\sum \frac{3n-1}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{1}{n} + 4\sum_1^\infty \frac{1}{n+1} - \frac{7}{2}\sum_1^\infty \frac{1}{n+2}$$

y dando valores a n y observando que $A+B+C=0$

$$S = -\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right] + 4\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right] -$$

$$-\frac{7}{2}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right] = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} + 2 = \frac{5}{4}$$

Solución:

$$\mathbf{\frac{5}{4}}$$

99. *Análisis y suma de la serie*

$$\sum \frac{2n+3}{(n-1)n(n+2)}$$

RESOLUCIÓN :

Aplicando el criterio de D'Alembert

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{2n^3-n^2-19n-10}{2n^3+11n^2+18n+9} = 1 \quad \text{dudosa}$$

criterio de Raabe

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha}, \qquad \lim n\alpha = 6 > 1 \quad \textit{convergente}$$

$$\frac{2n+3}{(n-1)n(n+2)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+2};$$

$$A = \frac{5}{3}, \quad B = -\frac{3}{2}, \quad C = -\frac{1}{6}; \qquad A+B+C = 0$$

sumaremos dando valores a partir de $n=2$

$$S = \frac{5}{3}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\right] +$$

$$-\frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\right] +$$

$$-\frac{1}{6}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\right]$$

$$S = \frac{5}{3}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right] - \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right] = \frac{65}{36}$$

Solución:

Convergente

$$\mathbf{S = \frac{65}{36}}$$

100. *Análisis y suma de la serie numérica convergente*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2n+1}{n(n+2)(n+4)}$$

RESOLUCIÓN :

$$\frac{2n+1}{n(n+2)(n+4)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+4}; \quad A = \frac{1}{8}, \quad B = \frac{6}{8}, \quad C = \frac{-7}{8};$$

$$A + B + C = 0$$

$$\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+2)(n+4)} = \frac{1}{8}\sum_1^\infty \frac{1}{n} + \frac{6}{8}\sum_1^\infty \frac{1}{n+2} - \frac{7}{8}\sum_1^\infty \frac{1}{n+4} =$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots\right) \\ &+ \frac{6}{8}\left(\qquad\qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots\right) \\ &- \frac{7}{8}\left(\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots\right) \end{aligned}\right\}$$

y teniendo en cuenta que $A+B+C=0$

$$S = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{6}{8}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{67}{96}$$

Solución:

$$\mathbf{\frac{67}{96}}$$

101. *Sumar la serie numérica convergente*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$$

RESOLUCIÓN :

Descomponiendo el término general

$$\frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+3}$$

$$5n+3 = A(n+1)(n+3) + Bn(n+3) + Cn(n+1)$$

para	$n=0,$	$3=3A,$	$A=1$
»	$n=-1,$	$-2=-2B,$	$B=1$
»	$n=-3,$	$-12=6C,$	$C=-2$

luego

$$\sum_1^\infty \frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)} = \sum_1^\infty \frac{1}{n} + \sum_1^\infty \frac{1}{n+1} - 2\sum_1^\infty \frac{1}{n+3} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \\ &\qquad + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad - \frac{2}{4} - \frac{2}{5} + \cdots \end{aligned}$$

de donde

$$S = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

Solución:

$$\mathbf{\frac{8}{3}}$$

102. *Suma de la serie*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{3n+2}{2^{n-1}}$$

RESOLUCIÓN:

$$S = 5 + \frac{8}{2} + \frac{11}{2^2} + \frac{14}{2^3} + \frac{17}{2^4} + \cdots$$

multiplicando por $\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2}S = \frac{5}{2} + \frac{8}{2^2} + \frac{11}{2^3} + \frac{14}{2^4} + \cdots$$

restándolas

$$\frac{1}{2}S = 5 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots = 5 + \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \cdots\right)$$

$$\frac{1}{2}S = 5 + \frac{3}{2}\cdot 2 = 8; \qquad S = 16$$

Solución:

16

103. *Hallar el número de términos que hay que tomar en la serie*

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{2^2} + \cdots$$

para obtener su suma con eror menor que 0,01 y calcular dicho valor.

RESOLUCIÓN:

$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$ convergente, pero $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}$, límite superior.

El límite superior del error viene dado por

$$e < u_n \frac{l}{1-l}; \qquad e < \frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$$

como queremos que $e < \frac{1}{100}$, plantearemos la inecuación

$$\frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \frac{1}{100}; \qquad n(n+1)\cdot 2^{n-1} \geqslant 100; \qquad n = 4 \text{ términos}$$

luego

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4\cdot 5}\cdot\frac{1}{8} = 0{,}6\dot{1}$$

Solución:

n = 4 términos

S = 0,61 con $e < \frac{1}{100}$

104. *Calcular el número de términos que hay que tomar en la serie*

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4^2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}\cdot\frac{1}{4^n} + \cdots$$

para obtener la suma con error menor que $\frac{1}{2\cdot 10^4}$

RESOLUCIÓN:

Aplicando el criterio de D'Alembert

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{2n+2}{2n+3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \text{convergente}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{4}$$

luego

$$e < u_n \frac{l}{1-l}; \qquad e = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}\cdot\frac{1}{4^n}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$e < \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}\cdot\frac{1}{4^n}\cdot\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2\cdot 10^4}$$

$$\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)\,4^n\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} \geqslant 2\cdot 10^4; \qquad n = 7$$

Solución:

7 términos

S = 0,3033

105. *Calcular el número de términos que hay que tomar en la serie*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

para obtener su suma con error menor que una milésima.

RESOLUCIÓN:

Aplicando D'Alembert

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{n}{n+3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \text{ convergente}, \qquad \text{como} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}$$

$$e < u_n \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{1000}$$

resolveremos la inecuación

$$n(n+1)(n+2)2^{n-1} > 1000; \qquad n=5$$

Solución: **5 términos**

106. *Estudio de la serie*

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

y calcular para x = 0,1 *la suma de la serie con cinco cifras decimales exactas.*

RESOLUCIÓN:

Apliquemos D'Alembert

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{x^{2n+1}(2n-1)}{(2n+1)x^{2n-1}} = x^2 < 1 \quad \text{luego} \quad |x| < 1 \text{ convergente}$$

el límite de la relación es x^2 y es límite superior, luego

$$e < \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \cdot x^2 = \frac{x^{2n+1}}{2n-1} \quad \text{y para} \quad x = 0{,}1$$

$$e < \frac{0{,}1^{2n+1}}{2n-1} \leqslant \frac{1}{100\,000}; \qquad n=2$$

como la suma ha de venir con cinco cifras decimales, tomaremos cada sumando con seis

$$S = 0{,}1 + \frac{0{,}001}{3} = 0{,}10034$$

Solución: **Convergente para $-1 \leqslant x < 1$**

$S = 0{,}10034$ con $e < \frac{1}{10^5}$

107. *Dadas las series*

$$\Sigma_1 = 1 + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{2^3}\cos 3x + \dots$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2}\,\text{sen}\, x + \frac{1}{2^2}\,\text{sen}\, 2x + \frac{1}{2^3}\,\text{sen}\, 3x + \dots$$

se pide:

1.° *Demostrar la convergencia.*

2.° *Calcular la suma de cada una de las series.*

RESOLUCIÓN:

1.° La progresión geométrica decreciente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

es «mayorante» de las series dadas, luego éstas serán convergentes

2.° Sumando miembro a miembro a la primera serie, la segunda multiplicada por i, y teniendo en cuenta que $\cos nx + i\,\text{sen}\, nx = e^{nxi}$

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 \cdot i = 1 + \frac{1}{2}e^{xi} + \frac{1}{2^2}e^{2xi} + \frac{1}{2^3}e^{3xi} + \dots$$

progresión geométrica decreciente de razón $\frac{e^{xi}}{2}$, luego su suma vale

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 \cdot i = \frac{1}{1 - \frac{e^{xi}}{2}} = \frac{2}{2-e^{xi}} = \frac{2}{2-(\cos x + i\,\text{sen}\, x)} = \frac{2}{(2-\cos x) - i\,\text{sen}\, x}$$

y racionalizando el denominador:

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 \cdot i = \frac{2[(2-\cos x) + i\,\text{sen}\, x]}{(2-\cos x)^2 + \text{sen}^2 x} = \frac{2(2-\cos x)}{5-4\cos x} + \frac{2\,\text{sen}\, x}{5 - 4\cos x}\, i$$

e igualando partes reales e imaginarias

$$\Sigma_1 = \frac{2(2-\cos x)}{5-4\cos x}, \qquad \Sigma_2 = \frac{2\,\mathrm{sen}\,x}{5-4\cos x}$$

Solución:

1.° Convergentes.

2.° $\Sigma_1 = \dfrac{2(2-\cos x)}{5-\cos x}$; $\Sigma_2 = \dfrac{2\,\mathrm{sen}\,x}{5-4\cos x}$

108. *Suma de la serie*

$$\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{1} + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{1+1\cdot 2x^2} + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{1+2\cdot 3x^2} + \ldots + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{1+n(n-1)x^2} + \ldots$$

RESOLUCIÓN:

Descomponiendo el término general

$$u_n = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{1+n(n-1)x^2} = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{nx-(n-1)x}{1+n(n-1)x^2} = \mathrm{arc\,tg}\,nx - \mathrm{arc\,tg}\,(n-1)\,x$$

$$S_n = [\mathrm{arc\,tg}\,x - \mathrm{arc\,tg}\,0\cdot x] + [\mathrm{arc\,tg}\,2x - \mathrm{arc\,tg}\,x] + [\mathrm{arc\,tg}\,3x - \mathrm{arc\,tg}\,2x] + \ldots$$
$$\ldots + [\mathrm{arc\,tg}\,nx - \mathrm{arc\,tg}\,(n-1)\,x]$$

$S_n = \mathrm{arc\,tg}\,nx$, luego

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{arc\,tg}\,nx = \frac{\pi}{2}$$

Solución:

$$\frac{\pi}{2}$$

109. *Análisis y suma de la serie*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (n^3+1)\,x^{n-1}$$

RESOLUCIÓN:

Fácilmente se ve aplicando el criterio de D'Alembert que es convergente para $-1<x<1$.

El primer factor de cada uno de los términos forma una progresión aritmética de tercer orden, cuyas diferencias calculamos

2	9	28	65	126 ...
7	19	37	61 ...	
12	18	24 ...		
6	6 ...			

Llamando S a la suma de la serie dada

$$S = 2 + 9x + 28x^2 + 65x^3 + 126x^4 + \ldots$$

multiplicando por x

$$Sx = 2x + 9x^2 + 28x^3 + 65x^4 + \ldots$$

y restándolas

$$S(1-x) = 2 + 7x + 19x^2 + 37x^3 + 61x^4 + \ldots = 2 + S_1 x \tag{1}$$

llamando

$$S_1 = 7 + 19x + 37x^2 + 61x^3 + \ldots$$

multiplicando por x

$$S_1 x = 7x + 19x^2 + 37x^3 + 61x^4 + \ldots$$

y restándolas

$$S_1(1-x) = 7 + 12x + 18x^2 + 24x^3 + \ldots = 7 + S_2 x \tag{2}$$

siendo

$$S_2 = 12 + 18x + 24x^2 + \ldots$$

multiplicando por x

$$S_2 x = 12x + 18x^2 + 24x^3 + \ldots$$

y restándolas

$$S_2(1-x) = 12 + 6x(1 + x^2 + x^3 + \ldots) = 12 + \frac{6x}{1-x} = \frac{12-6x}{1-x}$$

de donde $S_2 = \dfrac{6(2-x)}{(1-x)^2}$ valor que llevamos a (2)

$$S_1(1-x) = 7 + \frac{6x(2-x)}{(1-x)^2}\ ; \qquad S_1 = \frac{x^2-2x+7}{(1-x)^3}$$

llevando este valor a (1), obtenemos

$$S = \frac{-x^3 + 4x^2 + x + 2}{(1-x)^4}$$

Solución:

$$\frac{-x^3 + 4x^2 + x + 2}{(1-x)^4}; \qquad \textbf{para } |x| < 1$$

110. *Análisis y suma de la serie*

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)(2n+2)} + \dots$$

RESOLUCIÓN:

Apliquemos el criterio de Pringheim

$$\lim u_n \cdot n^\alpha = \lim \frac{n^\alpha}{(2n-1)2n(2n+1)(2n+3)}, \qquad \alpha = 4 > 1 \text{ convergente}$$

descomponemos el término general en suma de fracciones simples

$$u_n = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n} + \frac{C}{2n+1} + \frac{D}{2n+2} \tag{1}$$

quitando denominadores

$$1 = A\,2n(2n+1)(2n+2) + B(2n-1)(2n+1)(2n+2) +$$
$$+ C(2n-1)2n(2n+2) + D(2n-1)2n(2n+1)$$

$$\left.\begin{array}{llll} \text{para } n = \frac{1}{2}; & 1 = 6A; & A = \frac{1}{6} \\ \quad « \quad n = 0; & 1 = -2B; & B = -\frac{1}{2} \\ \quad « \quad n = -\frac{1}{2}; & 1 = 2C; & C = \frac{1}{2} \\ \quad « \quad n = -1; & 1 = -6D; & D = -\frac{1}{6} \end{array}\right\} A + B + C + D = 0 \tag{2}$$

de donde

$$S = \frac{1}{6}\Sigma\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{6}\Sigma\frac{1}{2n+2}$$

y dando valores a $n = 1, 2, 3, \dots$, y teniendo en cuenta (2)

$$S = \frac{2}{3}\cdot l\,2 - \frac{5}{12}$$

Solución:

CONVERGENTE

$$\mathbf{S = \frac{2}{3}\cdot l\,2 - \frac{5}{12}}$$

111. *Sumar la serie*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$$

sabiendo que

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

RESOLUCIÓN:

Descompondremos el término general así:

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2};$$

$$\sum \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)} - \sum_1^\infty \frac{1}{(n+1)^2} \tag{1}$$

la serie minuendo tiene por suma 1 (problema 96), luego

$$S = 1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) = 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Solución:

$$\mathbf{2 - \frac{\pi^2}{6}}$$

112. *Sumar la serie*

$$\sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{S_{n-1}}{n!} = \frac{2}{3!} + \frac{11}{4!} + \frac{35}{5!} + \dots$$

en la que S_n *es la suma de los productos binarios de los* n *primeros números naturales.*

Resolución:

Calculemos la ley de los numeradores aplicando diferencias finitas

0	0	2	11	35	85	175 ...
0	2	9	24	50	90 ...	
2	7	15	26	40 ...		
5	8	11	14 ...			
3	3	3 ..				

$$u_n = 0 + \binom{n-1}{1}\cdot 0 + \binom{n-1}{2}\cdot 2 + \binom{n-1}{3}\cdot 5 + \binom{n-1}{4}\cdot 3 =$$

$$= \frac{3n^4 - 10n^3 + 9n^2 - 2n}{24}$$

podemos escribir, viendo que para $n=0$, 1 y 2, $u_n=0$

$$\sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{S_{n-1}}{n!} = \frac{1}{24}\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{3n^4 - 10n^3 + 9n^2 - 2n}{n!}$$

descompongamos el numerador en la forma

$$3n^4 - 10n^3 + 9n^2 - 2n =$$

$$= A\,n(n-1)(n-2)(n-3) + B\,n(n-1)(n-2) + C\,n(n-1) + D\,n + E$$

donde

$$A=3, \quad B=8, \quad C=D=E=0; \quad (A+B)e = 11e$$

Solución:

$$\frac{11}{24}\cdot e$$

113. *Análisis y suma de la serie*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

Resolución:

Apliquemos el criterio de D'Alembert

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}\, x = x; \quad \text{convergente para } -1<x\leqslant 1$$

El término general lo descomponemos así:

$$\frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{x^n}{n} - \frac{x^n}{n+1}$$

luego

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n(n+1)} = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n} - \sum_1^\infty \frac{x^n}{n+1} \qquad (1)$$

recordemos las series logarítmicas

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$-\,l(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

la primera serie de (1) vale

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n} = -\,l(1-x)$$

y la segunda serie de (1) vale

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x}\left[-\,l(1-x) - x\right]$$

llevando estos dos valores a (1)

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n(n+1)} = -\,l(1-x) + \frac{1}{x}\,l(1-x) + 1 = 1 + \frac{1-x}{x}\cdot l(1-x)$$

Solución:

CONVERGENTE para $-<1<x\leqslant 1$

$$1 + \frac{1-x}{x}\cdot l(1-x)$$

114. *Análisis y suma de la serie*

$$\sum_{1}^{\infty} n\,(n+1)\,x^{n-1}$$

RESOLUCIÓN:

Apliquemos el criterio de D'Alembert

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{n+2}{n}\cdot x \to x, \qquad |x| < 1 \text{ convergente}$$

para $|x|=1$, $\lim u_n \neq 0$ es divergente

$$S = 2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + 30x^4 + \ldots$$

multiplicando por x

$$Sx = \quad 2x + 6x^2 + 12x^3 + 20x^4 + \ldots$$

y restándolas

$$S(1-x) = 2 + (4x + 6x^2 + 8x^3 + 10x^4 + \ldots) = 2 + 2x\cdot S_1 \qquad (1)$$

siendo

$$S_1 = \quad 2 + 3x + 4x^2 + 5x^3 + \ldots$$

multiplicando por x

$$S_1 x = \quad 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

y restándolas

$$S_1(1-x) = 2 + x(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) =$$

$$= 2 + \frac{x}{1-x} = \frac{2-x}{1-x}; \qquad S_1 = \frac{2-x}{(1-x)^2}$$

llevando este valor a (1)

$$S(1-x) = 2 + \frac{2x(2-x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}, \quad \text{de donde} \quad S = \frac{2}{(1-x)^2}$$

Solución:

$$\mathbf{\frac{2}{(1-x)^3} \quad \text{para} \quad |x| < 1}$$

115. *Suma de las series*

$$\Sigma_1 = \frac{1}{g} - \frac{p}{1!(g+1)} + \frac{p(p-1)}{2!(g+2)} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+2)}{(n-1)!(g+n-1)} + \ldots$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{g} - \frac{p}{1!(g+a)} + \frac{p(p-1)}{g(g+2a)} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+2)}{(n-1)![g+(n-1)a]} + \ldots$$

RESOLUCIÓN:

1.ª Se tiene evidentemente:

para $p=2$, $\dfrac{1}{g} - \dfrac{2}{g+1} + \dfrac{1}{g+2} = \left(\dfrac{1}{g} - \dfrac{1}{g+1}\right) - \left(\dfrac{1}{g+1} - \dfrac{1}{g+2}\right) = \dfrac{1\cdot 2}{g(g+1)(g+2)}$

para $p=3$, $\dfrac{1}{g} - \dfrac{3}{g+1} + \dfrac{3}{g+2} - \dfrac{1}{g+3} = \left(\dfrac{1}{g} - \dfrac{2}{g+1} + \dfrac{1}{g+2}\right) - \left(\dfrac{1}{g+1} - \dfrac{2}{g+2} + \dfrac{1}{g+3}\right) =$

$$= \frac{1\cdot 2}{g(g+1)(g+2)} - \frac{1\cdot 2}{(g+1)(g+2)(g+3)} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{g(g+1)(g+2)(g+3)}$$

y en general

$$\Sigma_1 = \Sigma(-1)^n \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+2)}{(n-1)!(g+n-1)} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots p}{g(g+1)(g+2)\ldots(g+p)}$$

2.ª Igual se haría para la segunda serie, pero cabe deducirla de la primera al reemplazar g por $\dfrac{g}{a}$

$$\Sigma(-1)^n \frac{p(p-1)(p-2)\,(p-n+2)}{(n-1)!\left(\dfrac{g}{a}+n-1\right)a} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots p}{\dfrac{g}{a}\left(\dfrac{g}{a}+1\right)\left(\dfrac{g}{a}+2\right)\ldots\left(\dfrac{g}{a}+p\right)} =$$

$$= \frac{p!\,a^p}{g(g+a)(g+2a)\ldots(g+ap)}$$

Solución:

$$\mathbf{\Sigma_1 = \frac{p!}{g(g+1)(g+2)\ldots(g+p)}}$$

$$\mathbf{\Sigma_2 = \frac{p!\,a^p}{g(g+a)(g+2a)\ldots(g+ap)}}$$

116. *Análisis y suma de la serie*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^3+1}{n!}$$

RESOLUCIÓN:

Apliquemos el criterio de D'Alembert

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^3+1} =$$

$$= \lim \frac{(n+1)^3+1}{n^3+1} \cdot \frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n} = 0 < 1 \text{ CONVERGENTE}$$

para sumarla descompondremos el término general, en la forma

$$\frac{n^3+1}{n!} = \frac{\mathrm{A}\,n(n-1)(n-2) + \mathrm{B}\,n(n-1) + \mathrm{C}\,n + \mathrm{D}}{n!}$$

$$\mathrm{A} = 1, \quad \mathrm{B} = 3, \quad \mathrm{C} = 1, \quad \mathrm{D} = 1$$

$$\sum_1^\infty \frac{n^3+1}{n!} = \sum_1^\infty \frac{1}{(n-3)!} + 3\sum_1^\infty \frac{1}{(n-2)!} + \sum_1^\infty \frac{1}{(n-1)!} + \sum_1^\infty \frac{1}{n!} =$$

$$= e + 3e + e + e - 1 = 6e - 1$$

Solución:

6e − 1

117. *Sumar la serie*

$$\sum = \frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \ldots + \frac{n^3}{n!}$$

RESOLUCIÓN:

Simplificando cada término

$$\sum = 1 + \frac{2^2}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \ldots + \frac{n^2}{(n-1)!} + \ldots = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^2}{(n-1)!}$$

efectuamos la descomposición

$$n^2 = \mathrm{A}(n-1)(n-2) + \mathrm{B}(n-1) + \mathrm{C} = (n-1)(n-2) + 3(n-1) + 1$$

luego

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} = \sum_1^\infty \frac{1}{(n-3)!} + 3\sum_1^\infty \frac{1}{(n-2)!} + \sum_1^\infty \frac{1}{(n-1)!} = 5e$$

Solución:

5e

118. *Análisis y suma de la serie*

$$\sum_1^\infty \frac{n^2}{n!} x^n$$

RESOLUCIÓN:

Aplicando el criterio de D'Alembert

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} x = 0 \quad \text{siempre CONVERGENTE}$$

Descompongamos

$$n^2 = \mathrm{A}n(n-1) + \mathrm{B}n + \mathrm{C}; \quad \mathrm{A} = 1; \quad \mathrm{B} = 1; \quad \mathrm{C} = 0$$

luego

$$\sum_1^\infty \frac{n^2}{n!} x^n = \sum_1^\infty \frac{x^n}{(n-2)!} + \sum_1^\infty \frac{x^n}{(n-1)!} = x^2 e^x + x e^x = e^x (x^2 + x)$$

Solución:

$$\mathbf{e^x(x^2+x)}$$

119. *Análisis y suma de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^{n+1}\, n!}$$

RESOLUCIÓN :

Aplicando el criterio de D'Alembert

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{8(n+1)} \longrightarrow 0 < 1 \quad \text{convergente}$$

podemos escribir

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{8^{n+1}\, n!} = \frac{1}{8} \sum_{1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^n}{n!}$$

y teniendo en cuenta la serie exponencial

$$S = \frac{1}{8}\left(e^{\frac{1}{8}} - 1\right)$$

Solución:

$$\mathbf{\frac{1}{8}\left(e^{\frac{1}{8}} - 1\right)}$$

120. *Suma de la serie*

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{2^{2n}\, n!}$$

RESOLUCIÓN :

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}\, n!} = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{4^n\, n!} = \sum_{0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{n!} = e^{\frac{1}{4}}$$

Solución:

$$\mathbf{e^{\frac{1}{4}}}$$

121. *Suma de la serie*

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n^2 + (x-1)\,n + x^2}{n!}$$

RESOLUCIÓN :

Fácil es ver que es convergente para cualquier valor de x.
Para hallar su suma, descompondremos el numerador así:

$$n^2 + (x-1)n + x^2 = An(n-1) + Bn + C\,; \qquad A = 1, \qquad B = x, \qquad C = x^2$$

obteniéndose al sustituir:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(n-2)!} + x \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(n-1)!} + x^2 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!} = e\,(x^2 + x + 1)$$

Solución:

$$\mathbf{e(x^2 + x + 1)}$$

122. *Suma de la serie*

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{l\,\dfrac{n+1}{n}}{l\,n \cdot l\,(n+1)}$$

RESOLUCIÓN :

Descompondremos el término general así:

$$u_n = \frac{l\,(n+1) - l\,n}{l\,n \cdot l\,(n+1)} = \frac{1}{l n} - \frac{1}{l\,(n+1)}$$

y dando valores a $n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{l\,\dfrac{n+1}{n}}{l\,n \cdot l\,(n+1)} = \sum_{n=2}^{n=\infty} \left(\frac{1}{l\,n} - \frac{1}{l\,(n+1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{l\,2} - \frac{1}{l\,3} + \frac{1}{l\,3} - \frac{1}{l\,4} + \ldots - \frac{1}{l\,(n+2)} + \ldots$$

luego

$$S_n = \frac{1}{l\,2} - \frac{1}{l\,(n+2)}$$

y para $n \to \infty$

$$S = \frac{1}{l\,2}$$

Solución:

$$\mathbf{\frac{1}{l\,2}}$$

123. *Análisis y suma de la serie*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n \cdot 4^n}$$

Resolución:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,4^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 4^n}{x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4\,(n+1)} \cdot x = \frac{x}{4} < 1 \text{ convergente}$$

será convergente para $|x| < 4$.

Para sumar la serie hagamos $\frac{x}{4} = y < 1$

$$S = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \ldots = -\,l\,(1-y) = l\,\frac{1}{1-y} = l\,\frac{4}{4-x}$$

Solución:

Convergente para $-4 \leqslant x < 4$

$$\mathbf{S = l\,\frac{4}{4-x}}$$

124. *Estudiar y sumar la serie*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} l\left(1 + \frac{1}{n\,(n+2)}\right)$$

Resolución:

Comparamos la serie dada con la serie convergente $v_n = \frac{1}{n\,(n+2)}$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{l\left(1 + \frac{1}{n\,(n+2)}\right)}{\frac{1}{n\,(n+2)}} = \lim l\left(1 + \frac{1}{n\,(n+2)}\right)^{n\,(n+2)} = l\,e = 1$$

luego la serie dada es convergente.

Para calcular su suma, descompondremos el término general

$$u_n = l\left(1 + \frac{1}{n\,(n+2)}\right) = l\,\frac{(n+1)^2}{n\,(n+2)} = 2\,l\,(n+1) - l\,n - l\,(n+2)$$

y dando valores a $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\left.\begin{array}{lll} n=1 & 2\,l\,2 & -\,l\,1 - l\,3 \\ n=2 & 2\,l\,3 & -\,l\,2 - l\,4 \\ n=3 & 2\,l\,4 & -\,l\,3 - l\,5 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ n=n & 2\,l\,(n+1) & -\,l\,n - l\,(n+2) \end{array}\right\}$$

sumando

$$\Sigma\, u_n = l\,2 + l\,(n+1) - l\,(n+2) = l\,2 + l\,\frac{n+1}{n+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l\,2$$

Solución:

CONVERGENTE

$$\mathbf{S = l\,2}$$

125. *Análisis y suma de la serie*

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3\,n)!}$$

RESOLUCIÓN:

Apliquemos el criterio de D'Alembert

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(3n)!}{(3n+3)!}\, x^3 \longrightarrow 0 \quad \text{CONVERGENTE}$$

Sean 1, α_1, α_2 las tres raíces cúbicas de la unidad; sabemos que la suma de sus enésimas potencias vale:

$$S_3 = 1 + \alpha_1^n + \alpha_2^n = \begin{cases} = 3 & \text{para} \quad n = \dot{3} \\ = 0 & \text{»} \quad n \neq \dot{3} \end{cases} \qquad (1)$$

La serie exponencial e^x, vale

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

sustituyendo x por $\alpha_1 x$ y por $\alpha_2 x$, tenemos

$$e^{\alpha_1 x} = 1 + \frac{\alpha_1 x}{1!} + \frac{(\alpha_1 x)^2}{2!} + \frac{(\alpha_1 x)^2}{3!} + \frac{(\alpha_1 x)^4}{4!} + \frac{(\alpha_1 x)^5}{5!} + \frac{(\alpha_1 x)^6}{6!} + \frac{(\alpha_1 x)^7}{7!} + \dots$$

$$e^{\alpha_2 x} = 1 + \frac{\alpha_2 x}{1!} + \frac{(\alpha_2 x)^2}{2!} + \frac{(\alpha_2 x)^3}{3!} + \frac{(\alpha_2 x)^4}{4!} + \frac{(\alpha_2 x)^5}{5!} + \frac{(\alpha_2 x)^6}{6!} + \frac{(\alpha_2 x)^7}{7!} + \dots$$

sumando miembro a miembro estos tres desarrollos y teniendo en cuenta (1)

$$e^x + e^{\alpha_1 x} + e^{\alpha_2 x} = 3\left(1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \dots\right) = \frac{3}{x}\sum_0^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n)!} \qquad (2)$$

y como

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i \qquad e^{\alpha_1 x} = e^{-\frac{x}{2}}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\, x + i \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}\, x\right]$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i \qquad e^{\alpha_2 x} = e^{-\frac{x}{2}}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\, x - i \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}\, x\right]$$

sustituyendo en (2)

$$e^x + 2e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\, x = \frac{3}{x}\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3n)!}$$

Nota.—Se suman de esta forma todas las del tipo

$$u_n = \frac{x^{hn+\alpha}}{(hn+\beta)!}$$

teniendo en cuenta las raíces h-ésimas de la unidad.

Solución:

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{3}}\left[\mathbf{e^x + 2\,e^{-\frac{x}{2}} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\, x}\right]$$

126. *Suma de la serie*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{2^n\left(\sqrt[2n]{x}+1\right)}$$

RESOLUCIÓN:

Sabemos que

$$\frac{1}{u+1} = \frac{1}{u-1} - \frac{2}{u^2-1}$$

luego el término general lo descompondremos así:

$$u_n = \frac{1}{2^n\left(\sqrt[2n]{x}+1\right)} = \frac{1}{2^n\left(\sqrt[2n]{x}-1\right)} - \frac{1}{2^{n-1}\left(\sqrt[n]{x}-1\right)}$$

y dando valores $n=1, 2, 3, \dots, n$

$$u_1 = \frac{1}{2\left(\sqrt{x}-1\right)} - \frac{1}{x-1}$$

$$u_2 = \frac{1}{2^2\left(\sqrt[4]{x}-1\right)} - \frac{1}{2\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$u_3 = \frac{1}{2^3\left(\sqrt[8]{x}-1\right)} - \frac{1}{2^2\left(\sqrt[4]{x}-1\right)}$$

. . . .

$$u_n = \frac{1}{2^n\left(\sqrt[2n]{x}-1\right)} - \frac{1}{2^{n-1}\left(\sqrt[n]{x}-1\right)}$$

sumando ordenadamente

$$S_n = \frac{1}{2^n\left(\sqrt[2n]{x}-1\right)} - \frac{1}{x-1}$$

cuando $n \to \infty$,

$$2^n\left(\sqrt[2n]{x}-1\right) \to \infty$$

luego

$$S = \lim S_n = \frac{1}{1-x}$$

Solución:

$$\mathbf{S = \frac{1}{1-x}}$$

127. *Desarrollar en serie por división*

$$\frac{2x-1}{x^2-2x+1}$$

RESOLUCIÓN:

$$\begin{array}{llll|l}
-1 & +2x & & & 1-2x+x^2 \\ \hline
\text{»} & -2x & +x^2 & & -1+x^2+2x^3+3x^4+\dots \\
& \text{»} & \text{»} & +2x^3-x^4 & \\
& & \text{»} & 4x^4-2x^5 & \\ \cline{4-4}
& & & 3x^4-2x^5 &
\end{array}$$

el denominador tiene raíz doble $x=1$, luego $|x|<1$.

Solución:

$$\mathbf{-1 + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots + nx^{n+1} + \dots}$$

$$\mathbf{para\ |x| < 1}$$

128. *Desarrollar en serie, por el método de coeficientes indeterminados.*

$$y = \frac{2x-1}{x^2-2x+1}$$

RESOLUCIÓN:

$$\frac{2x-1}{1-2x+x^2} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n + \dots$$

quitando denominadores

$$\begin{array}{rrr|rr|rr|rr|l}
2x-1 = & A_0 + & A_1 & x + & A_2 & x^2 + & A_3 & x^3 + \dots + & A_n & x^n + \dots \\
& & -2A_0 & & -2A_1 & & -2A_2 & & -A_{n-1} & \\
& & & & A_0 & & A_1 & & A_{n-2} &
\end{array}$$

$$A_0 = -1, \quad A_1 - 2A_0 = 2, \quad A_2 - 2A_1 + A_0 = 0, \quad A_3 - 2A_2 + A_1 = 0, \dots$$

$$A_n - 2A_{n-1} + A_{n-2} = 0$$

$$A_0 = -1, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = 2, \quad A_4 = 3, \quad A_5 = 4, \dots, A_{n+1} = n$$

obteniéndose finalmente

Solución:

$$\mathbf{\frac{2x-1}{x^2-2x+1} = -1 + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots + nx^{n+1} + \dots}$$

$$\mathbf{para\ |x| < 1}$$

129. *Desarrollar en serie por coeficientes indeterminados.*

$$y = \frac{1-6x}{x^2-2x+1}$$

RESOLUCIÓN:

$$\frac{1-6x}{1-2x+x^2} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n + \dots$$

quitando denominadores

$$\begin{array}{rrr|rr|rr|rr|rr|l}
1-6x = & A_0 + & A_1 & x + & A_2 & x^2 + & A_3 & x^3 + & A_4 & x^4 + \dots + & A_n & x^n \\
& & -2A_0 & & -2A_1 & & -2A_2 & & -2A_3 & & -2A_{n-1} & \\
& & & & A_0 & & A_1 & & A_2 & & A_{n-2} &
\end{array}$$

$$A_0 = 1; \quad -6 = A_1 - 2; \quad 0 = A_2 + 8 + 1; \quad 0 = A_3 + 18 - 4 \dots$$

$$A_1 = -4 \qquad A_2 = -9 \qquad A_3 = -14$$

ley recurrente

$$A_n = 2A_{n-1} - A_{n-2}$$

raíces del denominador $x=1$, luego $|x| < 1$.

Solución:

$$\mathbf{y = 1 - 4\,x - 9\,x^2 - 14\,x^3 - \ldots + A_n\,x^n + \ldots}$$

para $|x| < 1$

ley recurrente $\mathbf{A_n = 2\,A_{n-1} - A_{n-2}}$

130. *Hallar la ley de recurrencia y sumar la serie*

$$1 - 4x - 9x^2 - 14x^3 - 19x^4 - 24x^5 + \ldots$$

RESOLUCIÓN:

(ver problema anterior)

Formemos los determinantes

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -9 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -9 \\ -4 & -9 & -14 \\ -3 & -14 & -19 \end{vmatrix}$$

vemos que $\Delta_1 \neq 0$ y $\Delta_2 = 0$ luego tendrá soluciones el sistema

$$\left.\begin{aligned} \lambda - 4\mu &= -9 \\ -4\lambda - 9\mu &= -14 \end{aligned}\right\} \lambda = -1, \quad \mu = 2$$

luego la ley de recurrencia de los coeficientes es

$$A_n = 2A_{n-1} - A_{n-2}$$

y el denominador de la fracción generatriz será $x^2 - 2x + 1$ y llamando $ax+b$ al numerador, podremos escribir

$$ax + b = (1 - 2\,x + x^2)(1 - 4\,x - 9\,x^2 - 14\,x^3 - 19\,x^4 - \ldots)$$

$$\begin{array}{rr|r|r|r|l} ax + b = & 1 - 4 & x - 9 & x^2 - 14 & x^3 - 19 & x^4 - \ldots = 1 - 6\,x \\ & -2 & 8 & 18 & 28 & \\ & & 1 & -4 & -9 & \\ & & » & » & » & \end{array}$$

Solución:

$$\mathbf{\frac{1 - 6\,x}{1 - 2\,x + x^2}} \qquad \textbf{para } |x| < 1$$

131. *Desarrollar en serie, según las potencias de* x

$$y = \frac{x \operatorname{sen} \theta}{x^2 - 2\,x \cos \theta + 1}$$

RESOLUCIÓN:

Seguiremos el método de coeficientes indeterminados (teniendo en cuenta que el numerador se anula para $x=0$)

$$x \operatorname{sen} \theta = (1 - 2\,x \cos \theta + x^2)(A_1\,x + A_2\,x^2 + A_3\,x^3 + \ldots + A_n\,x^n + \ldots) =$$

$$\begin{array}{rr|r|r|l} = A_1\,x + & A_2 & x^2 + \quad A_3 & x^3 + \ldots + \quad A_n & x^n + \ldots \\ & -2\,A_1 \cos\theta & -2\,A_2 \cos\theta & -2\,A_{n-1} \cos\theta & \\ & & A_1 & A_{n-2} & \end{array}$$

$A_1 = \underline{\operatorname{sen} \theta}$

$A_2 - 2\,A_1 \cos\theta = 0 \qquad A_2 = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = \underline{\operatorname{sen} 2\,\theta}$

$A_3 - 2\,A_2 \cos\theta + A_1 \qquad A_3 = 4 \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta = 3 \operatorname{sen}\theta - 4 \operatorname{sen}^3\theta = \underline{\operatorname{sen} 3\,\theta}$

ley recurrente de coeficientes:

$$A_n = 2A_{n-1} \cos\theta - A_{n-2} \tag{1}$$

es fácil demostrar la ley general, ya que si suponemos que

$$A_{n-2} = \operatorname{sen}(n-2)\,\theta\,; \quad A_{n-1} = \operatorname{sen}(n-1)\,\theta\,, \quad \text{vemos que} \quad A_n = \operatorname{sen} n\,\theta$$

en efecto

$$A_n + A_{n-2} = \operatorname{sen} n\,\theta + \operatorname{sen}(n-2)\,\theta = 2 \operatorname{sen}(n-1)\,\theta \cos\theta = 2\,A_{n-1} \cos\theta$$

como las raíces del denominador son $\cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta$, de módulo 1 podemos escribir

Solución:

$$\mathbf{y = x \operatorname{sen} \theta + x^2 \operatorname{sen} 2\,\theta + x^3 \operatorname{sen} 3\,\theta + \ldots + x^n \operatorname{sen} n\,\theta + \ldots}$$

para $|x| < 1$

132. *Sumar la serie*

$$1-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{8}x^3+\frac{3}{8}x^4+\dots$$

en la que el coeficiente de cada término es medio aritmético del triplo del anterior y del cuádruplo del siguiente. Calcular además el campo de convergencia.

RESOLUCIÓN:

$$A_{n-1}=\frac{3\,A_{n-2}+4\,A_n}{2}$$

de donde

$$4A_n-2A_{n-1}+3A_{n-2}=0$$

la ley recurrente nos indica que la suma es una función racional de x cuyo denominador es $4-2x+3x^2$

$$\frac{a+bx+cx^2+\dots}{4-2x+3x^2}=1-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{8}x^3+\frac{3}{8}x^4\dots$$

$$\begin{array}{rl|l|l|l} a+bx+cx^2+\dots=4-2x & -3 & x^2-\frac{3}{2} & x^3+\frac{3}{2} & x^4+\dots \\ & 3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \\ & & & -\frac{9}{4} & \end{array}$$

de donde

$$a=4,\quad b=-2,\quad c=0,\quad d=0\dots$$

la suma es

$$S=\frac{4-2x}{4-2x+3x^2}$$

las raíces del denominador son $\dfrac{1+\sqrt{11}\,i}{3}$ cuyo módulo es $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Solución:

$$\mathbf{S=\frac{4-2x}{4-2x+3x^2}}$$

para $$-\frac{2\sqrt{3}}{3}<x<\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

133. *Desarrollar en serie, según las potencias de* x

$$y=(1+e^x)^2$$

RESOLUCIÓN:

$$y=e^{2x}+2e^x+1$$

y recordando la serie exponencial

$$\begin{array}{r|l|l|l} y=1+\frac{2}{1!} & x+\frac{2^2}{2!} & x^2+\frac{2^3}{3!} & x^3+\dots \\ 2+\frac{2}{1!} & \quad\frac{2}{2!} & \quad+\frac{2}{3!} & \\ 1 & & & \end{array}$$

luego

$$y=4+2(1+2^0)\frac{x}{1!}+2(1+2^1)\frac{x^2}{2!}+2(1+2^2)\frac{x^3}{3!}+\dots$$

para cualquier valor de x.

Solución:

$$\mathbf{y=4+2\sum_{n=1}^{n=\infty}(1+2^{n-1})\frac{x^n}{n!}}$$

134. *Desarrollar en serie*

$$y=\frac{l(1+x)}{(x+1)^2}$$

RESOLUCIÓN:

Este problema lo resolveremos por el desarrollo de Mac-Laurin, en el problema número 467. Lo vamos a calcular, por coeficiente indeterminado, teniendo en cuenta el desarrollo de $l(1+x)$

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\dots$$

$$\frac{l(1+x)}{(x+1)^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\dots$$

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\dots=(1+2x+x^2)(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\dots)$$

efectuando las operaciones

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots=\begin{array}{l|l|l|l|l} a_0+a_1 & x+a_2 & x^2+a_3 & x^3+a_4 & x^4+\ldots \\ \quad 2a_0 & 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \end{array}$$

e igualando coeficientes del mismo grado:

$$\begin{array}{ll} a_0=0 & a_0=0 \\ a_1+2a_0=1 & a_1=1 \\ a_2+2a_1+a_0=-\dfrac{1}{2} & a_2=-\dfrac{5}{2\,!} \\ a_3+2a_2+a_1=\dfrac{1}{3} & a_3=\dfrac{13}{3}=\dfrac{26}{3\,!} \\ a_4+2a_3+a_2=-\dfrac{1}{4} & a_4=-\dfrac{77}{12}=-\dfrac{154}{4\,!} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n+2a_{n-1}+a_{n-2}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n} & a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}-2a_{n-1}-a_{n-2} \end{array}$$

Solución:

$$\mathbf{y=x-\frac{5}{2\,!}x^2+\frac{26}{3\,!}x^3-\frac{154}{4\,!}x^4+\ldots}$$

ley recurrente $\quad \mathbf{a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}-2a_{n-1}-a_{n-2}}$

135. *Hallar un valor positivo de* x *tal que la serie siguiente sume* 12

$$S=1+4x+9x^2+16x^3+\ldots+n^2x^{n-1}+\ldots$$

RESOLUCIÓN:

La serie dada es convergente para $-1<x<1$; multiplicando los dos miembros por x y restándola de la serie dada

$$S(1-x)=1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\ldots$$

multiplicando por x;

$$Sx(1-x)=x+3x^2+5x^3+7x^4+\ldots$$

y restándolas

$$S(1-x)^2=1+2(x+x^2+x^3+\ldots)$$

la suma para $|x|<1$ vale

$$S(1-x)^2=1+\frac{2x}{1-x}=\frac{1+x}{1-x}; \qquad S=\frac{1+x}{(1-x)^3}$$

como

$$S=12 \qquad 12(1-x)^3=1+x; \qquad \text{para} \qquad x=\frac{1}{2}$$

Solución:

$$\mathbf{x=\frac{1}{2}}$$

136. *Desarrollar en serie por coeficientes indeterminados*

$$\frac{1+x}{(1-x)^3}$$

RESOLUCIÓN:

$$\frac{1+x}{1-3x+3x^2-x^3}=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_nx^n+\ldots$$

quitando denominadores

$$1+x=\begin{array}{l|l|l|l|l|l} A_0+A_1 & x+A_2 & x^2+A_3 & x^3+A_4 & x^4+\ldots+A_n & x^n \\ \quad -3A_0 & -3A_1 & -3A_2 & -3A_3 & -3A_{n-1} & \\ & 3A_0 & 3A_1 & 3A_2 & +3A_{n-2} & \\ & & -A_0 & -A_1 & -A_{n-3} & \end{array}$$

igualando coeficientes de términos del mismo grado

$\underline{A_0=1}$; $\quad 1=A_1-3$; $\quad A_1=4$; $\quad 0=A_2-12+3$; $\quad \underline{A_2}=9=3^2$

ley recurrente a partir del A_3

$$A_n=3A_{n-1}-3A_{n-2}+A_{n-3}$$
$$A_3=27-12+4=16=4^2;$$

fácil es ver que la ley es general $A_n = n^2$. Las raíces del denominador son $x = 1$, luego $|x| < 1$.

Solución:

$$\mathbf{1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + \ldots + n^2 x^{n-1} + \ldots}$$

$$\textbf{para } |\mathbf{x}| < \mathbf{1}$$

137. *Desarrollar en serie*

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

RESOLUCIÓN:

Desarrollaremos por el binomio de Newton

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 +$$

$$+ \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{2!}x^3 + \ldots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2^2\, 2!}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3\, 3!}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4\, 4!}x^4 + \ldots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \ldots$$

Solución:

$$\mathbf{y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}\, x^n}$$

$$\textbf{para } |\mathbf{x}| < \mathbf{1}$$

138. *Desarrollar en serie*

$$y = \frac{1-x}{\sqrt{1+x}}$$

RESOLUCIÓN:

En el problema anterior hemos visto el desarrollo de

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \ldots$$

luego, multiplicando por $1-x$, obtenemos

$$\frac{1-x}{\sqrt{1-x}} = (1-x)\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \ldots\right) =$$

$$\begin{array}{rl|l|l|l}
= 1 & -\frac{1}{2} & x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} & x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} & x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \quad x^4 + \ldots \\
 & -1 & +\frac{1}{2} & -\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} & +\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}
\end{array}$$

$$= 1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\,\frac{7}{4}x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,\frac{11}{6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{15}{8}x^4 + \ldots$$

$$= 1 - \frac{3}{2}x + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \cdot \frac{(4n+3)}{2(n+1)}x^{n+1}$$

Solución:

$$\mathbf{1 - \frac{3}{2}x + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \cdot \frac{4n+3}{2n+2} \cdot x^{n+1}}$$

$$\textbf{para } |\mathbf{x}| < \mathbf{1}$$

139. *Desarrollar en serie*

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

RESOLUCIÓN :

Desarrollaremos por el binomio de Newton

$$y = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)}{2\,!}\, x^4 -$$

$$- \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\left(-\frac{1}{2} - 2\right)}{3\,!}\, x^6 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2\, 2\,!}\, x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3\, 3\,!}\, x^6 + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\,n - 1)}{2^n\, n\,!}\, x^{2n} + \ldots$$

y teniendo en cuenta que

$$2^n \cdot n\,! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2\,n$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\, x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\, x^6 + \ldots +$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\,n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2\,n}\, x^{2n} + \ldots$$

convergente para $|x| < 1$

Solución:

$$\mathbf{y = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\,n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2\,n}\, x^{2n}}$$

para $|\mathbf{x}| < 1$

140. *Desarrollar en serie de potencias y estudiar su convergencia, la función*

$$y = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

RESOLUCIÓN :

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro por $\sqrt{1 + x}$

$$y = \frac{(1 + x)}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 + x)(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

y teniendo en cuenta el desarrollo de $(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ del problema anterior

$$y = (1 + x)\left(1 + \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\, x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 8}\, x^6 + \ldots\right) =$$

$$= \sum_{1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\,n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2\,n}\, (x^{2n-2} + x^{2n-1})$$

convergente para $|x| < 1$.

Solución:

$$\mathbf{y = \sum_{1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\,n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2\,n}\, (x^{2n-2} + x^{2n-1})}$$

para $|\mathbf{x}| < 1$

4 *Variable compleja*

Recomendamos que se amplíen estos problemas con los del Capítulo 1.º, III.ª Parte de nuestro libro «Mil Problemas de Cálculo Integral».

IV

VARIABLE COMPLEJA

141. *Hallar el cociente de los complejos*

$$\frac{5+2i}{3-i} : (1-2i)$$

Resolución :

$$\frac{5+2i}{(3-i)(1-2i)} = \frac{5+2i}{1-7i} = \frac{(5+2i)(1+7i)}{50} = \frac{-9}{50} + \frac{37}{50}\,i$$

Solución:

$$\frac{-9}{50} + \frac{37}{50}\,i$$

142. *Calcular directamente el módulo de*

$$\frac{(2-3i)^4(1-i)^3}{\sqrt{5}+\sqrt{3}\,i}$$

Resolución :

$$R = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_3}; \quad \rho_1 = \sqrt{4+9}^{\,4} = 13^2; \quad \rho_2 = \sqrt{1+1}^{\,3} = 2\sqrt{2};$$

$$\rho_3 = \sqrt{5+3} = 2\sqrt{2}$$

luego

$$R = \frac{13^2 \cdot 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 169$$

Solución:

169

143. *Calcular el cociente*

$$\frac{(1+i)^5}{1+i^5}$$

RESOLUCIÓN:

$$\frac{(1+i)^5}{1+i^5} = \frac{1+5i+10i^2+10i^3+5i^4+i^5}{1+i} =$$

$$= \frac{1+5i-10-10i+5+i}{1+i} = \frac{-4-4i}{1+i} = -4$$

Solución:

−4

144. *Calcular el valor de a para que sea real el cociente*

$$\frac{2-ai}{1+2i}$$

y hallar dicho cociente

RESOLUCIÓN:

$$\frac{2-ai}{1+2i} = \frac{(2-ai)(1-2i)}{5} = \frac{2-2a}{5} - \frac{4+a}{5}i$$

para que sea real $a+4=0$, $a=-4$ y el cociente valdrá 2.

Solución:

a = −4; 2

145. *Hallar la cantidad por la que hay que multiplicar* 2−3i, *para obtener* 11−10i.

RESOLUCIÓN:

Habrá que multiplicar por el cociente

$$\frac{11-10i}{2-3i} = \frac{(11-10i)(2+3i)}{13} = \frac{52+13i}{13} = 4+i$$

Solución:

4 + i

146. *En la siguiente compleja*

$$\frac{3-2ai}{4-3i}$$

calcular el valor de a *para que sea real el cociente y calcular además el valor real de dicho cociente.*

RESOLUCIÓN:

$$\frac{3-2ai}{4-3i} = \frac{(3-2ai)(4+3i)}{25} = \frac{12+6a}{25} + \frac{9-8a}{25}i$$

anulando la parte imaginaria

$$9-8a=0; \qquad a=\frac{9}{8}$$

y el cociente valdrá

$$\frac{12+6\cdot\frac{9}{8}}{25} = \frac{3}{4}$$

Solución:

$$\mathbf{a} = \frac{9}{8}; \qquad \frac{3}{4}$$

147. *Calcular el valor de* a *para que sea real la expresión*

$$X = e^{l\frac{2-ai}{1+i}}$$

y hallar el valor de X.

RESOLUCIÓN:

$$e^{l\frac{2-ai}{1+i}} = \frac{2-ai}{1+i} = \frac{(2-ai)(1-i)}{2} = \frac{2-a}{2} - \frac{2+a}{2}i$$

para que sea real

$$2+a=0, \qquad a=-2$$

y

$$X = \frac{2-(-2)}{2} = 2$$

Solución:

a = −2, X = 2

148. *Calcular el valor de la expresión*

$$re^{\alpha i} + \frac{re^{\beta i}}{-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}} + re^{\beta i}\cdot e^{\frac{-2\pi}{3}i}$$

Resolución :

Aplicando la fórmula de Euler $e^{\alpha i} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$,

$$r(\cos + i \operatorname{sen}\alpha) + r(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + r(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)\left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) - r(\cos\beta - i\operatorname{sen}\beta) = r\left(e^{\alpha i} - e^{\beta i}\right)$$

Solución:

$$\mathbf{r\left(e^{\alpha i} - e^{\beta i}\right)}$$

149. *Módulo y argumento de* $(1+i)^3$

Resolución :

El módulo de $1+i$ es $\rho = \sqrt{2}$ y el argumento $\theta = \frac{\pi}{4}$ luego el módulo de $(1+i)^3$ es $R = 2\sqrt{2}$ y el argumento $w = \frac{3\pi}{4}$

Solución:

$$\mathbf{2\sqrt{2}, \quad 135^\circ}$$

150. *Escribir en forma binomia, las expresiones*

$$\sqrt{i}, \quad \frac{1}{\sqrt{i}}$$

Resolución :

1.º

$$\sqrt{i} = a + bi; \quad i = a^2 - b^2 + 2abi \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

cuya única solución real es

$$\begin{cases} a = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

2.º

$$\frac{1}{\sqrt{i}} = a + bi; \quad \frac{1}{i} = a^2 - b^2 + 2abi; \quad 1 = -2ab + (a^2 - b^2)i$$

$$\begin{cases} a = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \mp\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Solución:

$$\sqrt{\mathbf{i}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$$

$$\frac{1}{\sqrt{i}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$$

151. *Determinar una compleja cuyo cuadrado sea igual a su conjugada.*

Resolución :

$$(x + yi)^2 = x - yi; \quad x^2 - y^2 + 2xyi = x - yi \begin{cases} x^2 - y^2 = x & (1) \\ 2xy = -y & (2) \end{cases}$$

de (2) deducimos $y = 0$ no nos sirve, y $x = -\frac{1}{2}$ que llevamos a (1)

$$\frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2}; \quad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Solución:

$$-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

152. *Desarrollar* $(2-i)^6$.

RESOLUCIÓN:

$$(2-i)^6 = 2^6 - 6\cdot 2^5 i + 15\cdot 2^4 i^2 - 20\cdot 2^3 i^3 + 15\cdot 2^2 i^4 - 6\cdot 2\, i^5 + i^6 =$$

$$= 64 - 192\, i - 240 + 160\, i + 60 - 12\, i - 1 = -117 - 44\, i$$

Solución:

$$\mathbf{-117-44i}$$

153. *Desarrollar por el binomio de Newton*

$$(2-3i)^6$$

RESOLUCIÓN:

$$(2-3i)^6 = 2^6 - 6\cdot 2^5\cdot 3\, i + 15\cdot 2^4\cdot 9\, i^2 - 20\cdot 2^3\cdot 27\, i^3 +$$

$$+ 15\cdot 2^2\cdot 81\, i^4 - 6\cdot 2\cdot 243\, i^5 + 729\, i^6 =$$

$$= 64 - 6\cdot 32\cdot 3\, i - 15\cdot 16\cdot 9 + 20\cdot 8\cdot 27\, i + 15\cdot 4\cdot 81 - 6\cdot 2\cdot 243\, i - 729 =$$

$$= 64 - 576\, i - 2160 + 4320\, i + 4860 - 2916\, i - 729 = 2035 + 828\, i$$

Solución:

$$\mathbf{2035+828i}$$

154. *La suma de dos complejas es* $3+2i$; *la parte real de una de ellas es* 2. *Hallar dichas cantidades sabiendo que su cociente es una imaginaria pura.*

RESOLUCIÓN:

Las cantidades serán

$$2+xi\,; \qquad 1+yi$$

hallemos su cociente

$$\frac{2+x\,i}{1+y\,i} = \frac{(2+x\,i)(1-y\,i)}{1+y^2} = \frac{(2+x\,y)+(x-2\,y)\,i}{1+y^2}$$

y como ha de ser una imaginaria pura, $xy=-2$ y del enunciado deducimos $x+y=2$, luego x e y son las raíces de la ecuación

$$z^2-2z-2=0 \qquad z=1\pm\sqrt{3}$$

Solución:

$$\mathbf{2+(1+\sqrt{3})i,} \qquad \mathbf{1+(1-\sqrt{3})i}$$

$$\mathbf{2+(1-\sqrt{3})i,} \qquad \mathbf{1+(1+\sqrt{3})i}$$

155. *Racionalizar la expresión*

$$S=\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i}$$

RESOLUCIÓN:

Elevando al cuadrado

$$S^2=3+4i+3-4i+2\sqrt{9+16}=16$$

de donde

$$S=\pm 4$$

Solución:

$$\mathbf{\pm 4}$$

156. *Calcular los valores de* $\sqrt[3]{1}$ *y de* $\sqrt[3]{-1}$

RESOLUCIÓN:

1.°

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2\,K\,\pi}{3} + i\,\operatorname{sen}\frac{2\,K\,\pi}{3}, \qquad (K=0,\ 1,\ 2)$$

$$\sqrt[3]{1}\begin{cases} \text{para } K=0 & 1 \\ \text{» } K=1 & -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i \\ \text{» } K=2 & -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i \end{cases}$$

2.°

$$\sqrt[3]{-1} = \cos\frac{(2K+1)\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{(2K+1)\pi}{3}, \quad (K = 0,\ 1,\ 2)$$

$$\sqrt[3]{-1}\begin{cases} \text{para } K=0 & \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ \text{» } K=1 & -1 \\ \text{» } K=2 & \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Solución:

$$\sqrt[3]{1}\begin{cases} 1 \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases} \qquad \sqrt[3]{-1}\begin{cases} -1 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

157. *Calcular los valores algébricos de* $\sqrt[6]{1}$ *y de* $\sqrt[6]{-1}$

RESOLUCIÓN:

$$\sqrt[6]{1} = \cos\frac{2K\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{2K\pi}{6} \qquad (K = 0,\ 1,\ \ldots,\ 5)$$

$$\sqrt[6]{-1} = \cos\frac{(2K+1)\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{(2K+1)\pi}{6} \qquad (K = 0,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 5)$$

Solución:

$$\sqrt[6]{1}\begin{cases} \pm 1 \\ \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases} \qquad \sqrt[6]{-1}\begin{cases} \pm i \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \pm \dfrac{i}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \pm \dfrac{i}{2} \end{cases}$$

158. *Calcular* $\sqrt[3]{i}$

RESOLUCIÓN:

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2K\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2K\pi\right)} =$$

$$= \cos\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2K\pi\right) + i \operatorname{sen}\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2K\pi\right) \quad (K = 0,\ 1,\ 2)$$

$$\text{para } K=0 \quad \cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$\text{para } K=1 \quad \cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$$

$$\text{para } K=2 \quad \cos\frac{9\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{9\pi}{6} = -i$$

Solución:

$$-i, \quad \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \quad \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$$

159. *Resolver la ecuación*

$$x^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

RESOLUCIÓN:

El módulo de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ es $\rho = 1$ y el argumento $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2K\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 2K\pi\right)} =$$

$$= \cos\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} + 2K\pi\right) + i \operatorname{sen}\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} + 2K\pi\right); \quad K = 0,\ 1,\ 2$$

para K=0 $\quad x_1 = \cos\frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

para K=1 $\quad x_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$

para K=2 $\quad x_3 = -\cos\frac{5\pi}{12} - i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{12} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}[\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)]$

Solución:

$$\mathbf{x_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)]}$$

$$\mathbf{x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)}$$

$$\mathbf{x_3 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}[(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)]}$$

160. *Calcular* $\sqrt{5-12i}$.

Resolución:

$\sqrt{5-12i} = a+bi\,; \qquad 5-12i = a^2-b^2+2abi \qquad \begin{cases} a^2-b^2=5 \\ ab=-6 \end{cases}$

de la segunda $b=-6/a$ que llevamos a la primera

$a^2 - \frac{36}{a^2} = 5\,; \qquad a^4 - 5a^2 - 36 = 0\,; \qquad a = \pm\sqrt{\frac{5\pm 13}{2}} = \begin{cases} \pm 3 \\ \text{imaginarias} \end{cases}$

para $a = 3, \qquad b = -2$

» $\; a = -3, \qquad b = 2$

Solución:

$$\pm(\mathbf{3-2i})$$

161. *Calcular* $\sqrt{21+20i}$.

Resolución:

$\sqrt{21+20i} = a+bi, \qquad 21+20i = a^2-b^2+2abi \qquad \begin{cases} a^2-b^2=21 \\ ab=10 \end{cases}$

$b = \frac{10}{a}\,; \qquad a^2 - \frac{100}{a^2} = 21\,; \qquad a^4 - 21\,a^2 - 100 = 0\,; \qquad \begin{cases} a = \pm 5 \\ a = \pm 2i \text{ (imaginarias)} \end{cases}$

$a = \pm 5\,; \qquad b = \pm 2$

Solución:

$$\pm(\mathbf{5+2i})$$

162. *Resolver la ecuación*

$$x^2 + (6-i)x + 8 - 4i = 0$$

Resolución:

$$x = \frac{i-6\pm\sqrt{35-12i-32+16i}}{2} = \frac{i-6\pm\sqrt{3+4i}}{2} \qquad (1)$$

calculemos $\sqrt{3+4i}$

$\sqrt{3+4i} = a+bi, \qquad 3+4i = a^2-b^2+2abi \qquad \begin{cases} a^2-b^2=3 \\ ab=2 \end{cases}$

cuyas soluciones reales son

$a = \pm 2, \qquad b = \pm 1$

$\sqrt{3+4i} = \pm(2+i)$

que sustituimos en (1)

$$x = \frac{i-6\pm(2+i)}{2} = \begin{cases} -2+i \\ -4 \end{cases}$$

Solución:

$$\mathbf{x_1 = -4;} \qquad \mathbf{x_2 = -2+i}$$

163. *Resolver la ecuación*

$$x^2-(5-i)x+12-5i=0$$

RESOLUCIÓN :

$$x=\frac{5-i\pm\sqrt{25-10i-1-48+20i}}{2}=\frac{5-i\pm\sqrt{-24+10i}}{2} \qquad (1)$$

calculemos

$$\sqrt{-24+10i}=a+bi\,; \qquad -24+10i=a^2-b^2+2abi \qquad \left\{\begin{array}{l} a^2-b^2=-24 \\ ab=5 \end{array}\right.$$

$$b=\frac{5}{a}\,; \quad a^2-\frac{25}{a^2}=-24\,; \quad a^4+24a^2-25=0\,;$$

$$a=\pm 1$$
$$a=\pm 5i \quad \text{imaginarias}$$

$$\sqrt{-24+10i}=\pm(1+5i)$$

llevamos a (1)

$$x=\frac{5-i\pm(1+5i)}{2}=\left\langle\begin{array}{l} 3+2i \\ 2-3i \end{array}\right.$$

Solución:

$$\mathbf{x_1=3+2i; \qquad x_2=2-3i}$$

164. *Resolver la ecuación*

$$x^6+7x^3-8=0$$

RESOLUCIÓN :

Haciendo $x^3=y$ se obtiene la ecuación

$$y^2+7y-8=0, \qquad y_1=-8, \qquad y_2=1$$

luego

$$x=\sqrt[3]{-8}=2\sqrt[3]{-1}$$
$$x=\sqrt[3]{1}$$

y recordando las raíces cúbicas de $+1$ y de -1 (problema 156)

Solución:

$$\mathbf{x_1=1;} \quad \mathbf{x_{2,3}==-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i;} \quad \mathbf{x_4=-2;} \quad \mathbf{x_{5,6}=1\pm\sqrt{3}\,i}$$

165. *Calcular* $l\,(1+i)$.

RESOLUCIÓN :

$$1+i\left\{\begin{array}{ll} \text{módulo} & \rho=\sqrt{2} \\ \text{argumento} & \theta=\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right.$$

$$l(1+i)=l\sqrt{2}+\left(\frac{\pi}{4}+2\,K\,\pi\right)i$$

valor fundamental para $K=0$

$$l(1+i)=l\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\,i$$

Solución:

$$\mathbf{l\sqrt{2}+\left(\frac{\pi}{4}+2K\pi\right)i}$$

$$\textbf{valor fundamental } \mathbf{l\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}i}$$

166. *Calcular*

$$\log_{(2-2i)}(1+i)$$

RESOLUCIÓN :

$$\log_{(2-2i)}(1+i)=\frac{l(1+i)}{l(2-2i)}=\frac{l\sqrt{2}+\left(\dfrac{\pi}{4}+2\,K_1\pi\right)i}{l\sqrt{8}+\left(2\,K_2\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)i}$$

Solución:

$$\mathbf{\frac{l\sqrt{2}+\left(\dfrac{\pi}{4}+2K_1\pi\right)i}{l\sqrt{8}+\left(2K_2\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)i}}$$

167. *Valor fundamental de*

$$\log_i(-i)$$

RESOLUCIÓN:

$$\log_i(-i) = \frac{l(-i)}{li} = \frac{l\,1 - \frac{\pi}{2}\,i}{l\,1 + \frac{\pi}{2}\,i} = -1$$

Solución:

$$\mathbf{-1}$$

168. *Calcular el valor de* i^i.

RESOLUCIÓN:

$$i^i = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\,K\,\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\,K\,\pi\right)\right]^i =$$

$$= \left[e^{\left(\frac{\pi}{2} + 2\,K\,\pi\right) i}\right]^i = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\,K\,\pi\right)}$$

infinitos valores reales.

Valor fundamental

$$e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Solución:

$$\mathbf{e}^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\,K\,\pi\right)}$$

valor fundamental $\mathbf{e}^{-\frac{\pi}{2}}$

169. *Calcular el valor fundamental de*

$$i^{(1+i)}$$

RESOLUCIÓN:

$$i^{(1+i)} = \left[e^{\frac{\pi}{2}i}\right]^{(1+i)} = e^{-\frac{\pi}{2}}\, e^{\frac{\pi}{2}i} = e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot i$$

Solución:

$$\mathbf{e}^{-\frac{\pi}{2}} \cdot \mathbf{i}$$

170. *Resolver la ecuación*

$$z^i = 1 + i$$

RESOLUCIÓN:

Tomando logaritmos

$$i \cdot l\,z = l\sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2\,K\,\pi\right) i\,; \qquad l\,z = \left(\frac{\pi}{4} + 2\,K\,\pi\right) - i\,l\sqrt{2}$$

de donde

$$z = e^{\left(\frac{\pi}{4} + 2\,K\,\pi\right) - i\,l\sqrt{2}} = e^{\frac{\pi}{4} + 2\,K\,\pi}\left(\cos l\sqrt{2} - i \operatorname{sen} l\sqrt{2}\right)$$

Solución:

$$\mathbf{z = e^{\frac{\pi}{4} + 2K\pi}\left[\cos l\sqrt{2} - i \operatorname{sen} l\sqrt{2}\right]}$$

171. *Resolver la ecuación* $\cos x = 3$.

RESOLUCIÓN:

$$\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = 3\,; \qquad e^{xi} + e^{-xi} = 6\,; \qquad e^{2xi} - 6\,e^{xi} + 1 = 0$$

$$e^{xi} = 3 \pm 2\sqrt{2}\,; \qquad x\,i = l(3 \pm 2\sqrt{2}) + 2\,K\,\pi\,i$$

y finalmente

Solución:

$$\mathbf{x = i\,l\,(3 \pm 2\sqrt{2}) + 2K\pi}$$

172. *Resolver la ecuación*

$$\operatorname{sen} x = 2$$

RESOLUCIÓN:

$\dfrac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}=2$, quitando denominadores y multiplicando por e^{xi}, se obtiene

$$e^{2xi}-4i\,e^{xi}-1=0\,; \quad e^{xi}=2i\pm\sqrt{3}\,i=(2\pm\sqrt{3})\,i$$

tomando neperianos

$$x\,i = l(2\pm\sqrt{3})+\left(\frac{\pi}{2}+2\,K\,\pi\right)i$$

de donde

$$x=-i\,l(2\pm\sqrt{3})+\left(\frac{\pi}{2}+2\,K\,\pi\right)$$

y como

$$-\,l(2\pm\sqrt{3})=l\,\frac{1}{2\pm\sqrt{3}}=l(2\mp\sqrt{3})$$

Solución:

$$\mathbf{x = i\,\mathit{l}(2\pm\sqrt{3})+\frac{\pi}{2}+2\,K\,\pi}$$

173. *Resolver la ecuación*

$$\operatorname{sen} x=\sqrt{-1}$$

RESOLUCIÓN:

$$\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}=i\,; \quad e^{xi}-e^{-xi}=-2$$

multiplicando por e^{xi}

$$e^{2xi}+2\,e^{xi}-1=0\,; \quad e^{xi}=-1\pm\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{ll} e^{xi}=-1+\sqrt{2}\,; & x\,i=l(\sqrt{2}-1)+2\,K\,\pi\,i \\ e^{xi}=-1-\sqrt{2}\,; & x\,i=l(\sqrt{2}+1)+(2K+1)\,\pi\,i \end{array}\right\}$$

de donde

Solución:

$$\mathbf{x=i\,\mathit{l}\,(\sqrt{2}+1)+2K\pi}$$

$$\mathbf{x=i\,\mathit{l}\,(\sqrt{2}-1)+(2K+1)\pi}$$

174. *Resolver la ecuación*

$$\operatorname{tg} x=\frac{2}{5}\sqrt{-1}$$

RESOLUCIÓN:

$$\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{i\,(e^{xi}+e^{-xi})}=\frac{2}{5}\,i\,; \quad \frac{e^{2xi}-1}{e^{2xi}+1}=-\frac{2}{5}\,; \quad 7\,e^{2xi}=3$$

$$e^{2xi}=\frac{3}{7}\,; \quad 2\,x\,i=l\,\frac{3}{7}+2\,K\,\pi\,i\,; \quad x=-\,i\,l\sqrt{\frac{3}{7}}+K\,\pi=i\,l\sqrt{\frac{7}{3}}+K\,\pi$$

Solución:

$$\mathbf{x=i\,\mathit{l}\sqrt{\frac{7}{3}}+K\,n}$$

175. *Sean* a=2, b=i, c=1+2i *tres números complejos cuyos afijos son respectivamente los puntos* A, B *y* C.

Determinar una cuarta compleja cuyo afijo D *esté situado en la circunferencia que pasa por los puntos* A, B *y* C *y que equidiste de* B *y* C.

RESOLUCIÓN:

Circunferencia

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0$$

$$\begin{array}{lll} \text{pasa por A } (2{,}0) & 4a+c=-4 \\ \text{» » B } (0{,}1) & 2b+c=-1 \\ \text{» » C } (1{,}2) & 2a+4b+c=-5 \end{array}\left.\right\} \quad a=-\frac{7}{6}\,; \quad b=-\frac{5}{6}\,; \quad c=\frac{4}{6}$$

la circunferencia es

$$3x^2+3y^2-7x-5y+2=0 \tag{1}$$

ecuación de la recta BC

$$y=x+1$$

punto medio de BC

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{2} \\[2ex] y_0 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

mediatriz de BC

$$y = -x + 2 \qquad (2)$$

resolviendo el sistema (1) y (2) se obtiene

$$3x^2 - 7x + 2 = 0 \qquad x = \frac{7 \pm 5}{6} = \begin{cases} 2 \\ \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

llevando a (2)

$x = 2 \qquad y = 0 \qquad$ el punto A dado

$x = \dfrac{1}{3} \qquad y = \dfrac{5}{3}\,; \qquad$ coordenadas de D

Solución:

$$\mathbf{\frac{1}{3} + \frac{5}{3}\,i}$$

176. *Hallar dos cantidades cuya suma es* 363. *Si a la primera de estas cantidades la multiplicamos por* a *y a la segunda por* b, *la suma de productos es* 5280 + 1500i ; *pero si hubiésemos multiplicado a la segunda por* a *y a la primera por* b *los dos productos sumarían* 3795 − 1500i.

Se sabe además que log a − *log* $\dfrac{1}{b} = 2$.

Resolución:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 363 \\ ax + by = 5280 + 1500i \\ bx + ay = 3795 - 1500i \\ ab = 100 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} x + y = 363 \\ (a+b)\,(x+y) = 9075 \\ ab = 100 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} x + y = 363 \\ a + b = 25 \\ ab = 20 \end{array} \left\{\begin{array}{ll} a = 20, & b = 5 \\ a = 5, & b = 20 \end{array}\right.$$

para $a = 20, \qquad b = 5$

$$\left.\begin{array}{r} 20x + 5\,y = 5280 + 1500i \\ 5x + 20y = 3795 - 1500i \end{array}\right\}$$

cuya solución es

$$x = 231 + 100i, \qquad y = 132 - 100i$$

las mismas soluciones se obtienen como es lógico para $a = 5, \qquad b = 20$

Solución:

$$\mathbf{231 + 100i}$$

$$\mathbf{132 - 100i}$$

177. *Siendo* a>π, *demostrar que el argumento del producto*

$$V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \cdot \ldots \cdot V_n$$

tiende hacia un límite cuando n→∞, *siendo*

$$V_n = \cos\left(\frac{\pi}{a}\right)^n + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\right)^n$$

Resolución:

$$V_n = \cos\left(\frac{\pi}{a}\right)^n + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\right)^n = e^{\left(\frac{\pi}{a}\right)^n i}$$

luego, tomando la suma de los argumentos

$$S = \frac{\pi}{a}\left[1 + \frac{\pi}{a} + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^3 + \ldots\right]$$

progresión geométrica decreciente de razón

$$\frac{\pi}{a} < 1$$

$$\text{Argumento del producto} = \Omega = \frac{\dfrac{\pi}{a}}{1 - \dfrac{\pi}{a}} = \frac{\pi}{a - \pi}$$

Solución:

$$\mathbf{\frac{\pi}{a - \pi}}$$

178. *Condición para que los afijos de las raíces de la ecuación*

$$x^3 + (p + p'i)x + (q + q'i) = 0$$

sean los vértices de un triángulo equilátero

RESOLUCIÓN:

Como no hay término de segundo grado $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ y el centro de gravedad es el origen de coordenadas.

Como los ángulos $AOB = BOC = COA$ por ser el triángulo equilátero, los afijos de las tres raíces serán las tres raíces cúbicas de un número complejo y para que así suceda, en la ecuación se ha de verificar que $p + p'i = 0$ de donde $p = p' = 0$.

Solución:

$$\mathbf{p = p' = 0}$$

179. *Un cuadrilátero convexo es simétrico respecto de una diagonal AC, estando representados respectivamente los vértices A y C por los afijos de $1+i$ y de $5+5i$. Los dos lados que parten del vértice C tienen una longitud igual a los que parten de A multiplicados por $\sqrt{3}$ y uno de éstos es paralelo al eje real. Hallar las expresiones binomias de los otros dos vértices C y D.*

RESOLUCIÓN:

Coordenadas: del punto A(1,1), del punto C(5,5), B(1,x), D(x,1)

$$CB = AB \cdot \sqrt{3}, \qquad 3 \cdot AB^2 = CB^2, \qquad 3(x-1)^2 = (5-1)^2 + (5-x)^2$$

que desarrollado da la ecuación

$$x^2 + 2x - 19 = 0\,; \qquad x = -1 \pm 2\sqrt{5}$$

coordenadas de

$$B_1(1,\ -1+2\sqrt{5}), \qquad D_1(-1+2\sqrt{5},\ 1)$$

$$B_2(1,\ -1-2\sqrt{5}), \qquad D_2(-1-2\sqrt{5},\ 1) \quad \text{no es convexo}$$

Solución:

$$\mathbf{B = 1 + (-1 + 2\sqrt{5})i}$$

$$\mathbf{D = -1 + 2\sqrt{5} + i}$$

180. *Siendo α y β dos imaginarias conjugadas, calcular*

$$A = (\alpha + \beta)\,(\alpha^2 + \beta^2)\,(\alpha^3 + \beta^3) \ldots (\alpha^n + \beta^n)$$

RESOLUCIÓN:

Escribiéndolas en forma trigonométrica y aplicando la fórmula de Moivre

$$\alpha + \beta = \rho\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) + \rho\,(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta) = 2\,\rho\,\cos\theta$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2\,(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta) + \rho^2\,(\cos 2\theta - i\,\text{sen}\,2\theta) = 2\,\rho^2\cos 2\theta$$

. . . .

$$\alpha^n + \beta^n = \rho^n\,(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta) + \rho^n\,(\cos n\theta - i\,\text{sen}\,n\theta) = 2\,\rho^n\cos n\theta$$

y multiplicando ordenadamente

$$A = 2^n \cdot \rho^{1+2+3+\cdots+n} \cdot \cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 3\theta \cdot \ldots \cdot \cos n\theta$$

Solución:

$$\mathbf{A = 2^n \cdot \rho^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 3\theta \cdot \ldots \cdot \cos n\theta}$$

5 *Teoría de ecuaciones*

V

TEORIA DE ECUACIONES

181. *Hallar la relación que liga los coeficientes de las dos ecuaciones*

$$ax^2+bx+c=0 \qquad ax^2+b'x+c^2=0$$

para que la ecuación que resulte de igualar los primeros miembros de ambas, tenga por raíz la media aritmética de las raíces de las dos ecuaciones dadas.

Resolución:

$$(b-b')x+(c-c^2)=0 \qquad x=\frac{c(c-1)}{b-b'}$$

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}; \qquad \frac{4c(c-1)}{b-b'}=-\frac{b}{a}-\frac{b'}{a};$$

$$4ac(c-1)+b^2-b'^2=0$$

Solución:

$$\mathbf{4ac(c-1)+b^2-b'^2=0}$$

182. *Hallar los valores de* m, *par los cuales las raíces de la ecuación*

$$2x^2+(m-3)x+3-m=0$$

estén comprendidas entre -2 *y* 3.

Resolución :

Deberán verificarse simultáneamente las condiciones

$$\left.\begin{array}{r} \Delta > 0 \\ F(-2) > 0 \\ F(3) > 0 \\ -2 < \dfrac{3-m}{4} < 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} m^2+2m-15 > 0 \\ -3m+17 > 0 \\ 2m+12 > 0 \\ -8 < 3-m < 12 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} m \leqslant -5, \quad m \geqslant 3 \\ m < \dfrac{17}{3} \\ m > -6 \\ -9 < m < 11 \end{array}\right\}$$

y los valores que satisfacen a todas éstas condiciones son

$$-6 < m \leqslant -5 \qquad 3 \leqslant m < \frac{17}{3}$$

Solución:

$$\mathbf{-6 < m \leqslant -5 \qquad 3 \leqslant m < \frac{17}{3}}$$

183. *Dada la ecuación*

$$x^4 - 3(m+4)x^2 + (m+1)^2 = 0$$

determinar un valor entero para m *que haga que sus cuatro raíces estén en progresión aritmética, y calcular éstas cuatro raíces.*

Resolución :

Sean las cuatro raíces $-3h,\ -h,\ h,\ 3h$

$$(x+3h)(x+h)(x-h)(x-3h)=0 \qquad x^4-10h^2x^2+9h^4=0$$

ecuación que identificándola a la dada, da

$$\left.\begin{array}{r} 3(m+4) = 10h^2 \\ (m+1)^2 = 9h^4 \end{array}\right\} \quad \frac{3(m+4)}{m+1} = \frac{10}{\pm 3}$$

originándose las dos ecuaciones

$$9m+36 = 10m+10\,; \qquad 9m+36 = -10m-10$$

de las cuales la segunda no da raíz entera ; la primera da

$$m=26\,; \qquad h=\pm 3 \qquad x_1=-9, \qquad x_2=-3, \qquad x_3=3, \qquad x_4=9$$

Solución:

$$\mathbf{m=26}$$

$$\mathbf{x_1=-9, \qquad x_2=-3, \qquad x_3=3, \qquad x_4=9}$$

184. *Resolver la ecuación*

$$x^3+2x^2+(10\sqrt{5}-22)x+44-20\sqrt{5}=0$$

sabiendo que tiene una raíz doble.

Resolución :

Sean las raíces $\alpha,\ \alpha,\ \beta$. Aplicando las fórmulas de Cardano

$$\left.\begin{array}{r} 2\alpha+\beta=-2 \\ \alpha^2+2\alpha\beta=10\sqrt{5}-22 \\ \alpha^2\beta=20\sqrt{5}-44 \end{array}\right\}$$

sistema de donde deducimos, como única solución que satisface

$$\alpha=1-\sqrt{5}, \qquad \beta=-4+2\sqrt{5}$$

Solución:

$$\mathbf{x_1=x_2=1-\sqrt{5}\,; \qquad x_3=-4+2\sqrt{5}}$$

185. *Resolver la ecuación*

$$x^6+3x^5-12x^4-30x^3+21x^2+3x-2=0$$

sabiendo que admite la raíz $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

RESOLUCIÓN:

Como la ecuación tiene sus coeficientes enteros, si admite la raíz $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ también tendrá $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ y al tener la $-\sqrt{3}+\sqrt{2}$ tendrá $-\sqrt{3}-\sqrt{2}$, luego ya conocemos las cuatro raíces $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$ y la ecuación dada será divisible por

$$(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3}) =$$
$$= x^4 - 10x^2 + 1$$

el cociente igualado a cero es

$$x^2 + 3x - 2 = 0; \qquad x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Solución:

$$\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}; \qquad \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

186. *Resolver la ecuación*

$$x^4 - 5x^3 - 20x^2 + 60x + 144 = 0$$

sabiendo que el producto de dos raíces es igual al producto de las otras dos.

RESOLUCIÓN:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = (x_1 \cdot x_2)^2 = 144; \qquad x_1 \cdot x_2 = x_3 \cdot x_4 = \pm 12$$

a) Supongamos $x_1 \cdot x_2 = 12$, podemos descomponer la ecuación en dos

$$(x^2 + \alpha x + 12)(x^2 + \beta x + 12) =$$
$$= x^4 + (\alpha + \beta)x^3 + (\alpha\beta + 24)x^2 + 12(\alpha + \beta)x + 144 = 0$$

que al compararla con la dada

$$\begin{array}{rl} \alpha + \beta = -5 & \rightarrow \\ \alpha\beta + 24 = -20 & \qquad \text{incompatible} \\ 12(\alpha + \beta) = \ \ 60 & \rightarrow \end{array}$$

b) Probaremos $x_1 \cdot x_2 = -12$

$$(x^2 + \alpha x - 12)(x^2 + \beta x - 12) =$$
$$= x^4 + (\alpha + \beta)x^3 + (\alpha\beta - 24)x^2 - 12(\alpha + \beta)x + 144 = 0$$

y al compararla con la dada

$$\left.\begin{array}{r} \alpha\beta = -\ \ 5 \\ \alpha\beta - 24 = -20 \\ -12(\alpha + \beta) = \ \ 60 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \alpha\beta = -5 \\ \alpha\beta = \ \ 4 \end{array}\right\} \ \alpha, \beta \ \text{ raíces de } z^2 + 5z + 4 = 0 \ \left\{\begin{array}{l} \alpha = -4 \\ \beta = -1 \end{array}\right.$$

obteniéndose las dos ecuaciones

$$\begin{array}{lll} x^2 - 4x - 12 = 0 & x_1 = -2, & x_2 = 6 \\ x^2 - x - 12 = 0 & x_3 = -3, & x_4 = 4 \end{array}$$

Solución:

$$-2, \qquad -3, \qquad 4, \qquad 6$$

187. *Resolver la ecuación*

$$x^4 + 6x^3 - 47x^2 - 60x + 100 = 0$$

sabiendo que la suma de dos raíces es 6 y que el producto de las otras dos es 20.

RESOLUCIÓN:

Sean las raíces a, b, c, d.

De las fórmulas de Cardano, deducimos:

$$\left.\begin{array}{r} a + b + c + d = -6 \\ abcd = 100 \end{array}\right\} \ \text{y como} \quad a + b = 6; \qquad cd = 20$$

nos dan al combinarlas los dos sistemas

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 6 \\ a \cdot b = 5 \end{array}\right\} \ a = 5, \qquad b = 1$$

$$\left.\begin{array}{r} c + d = -12 \\ c + d = \ \ 20 \end{array}\right\} \ c = \ \ 2, \qquad d = -10$$

Solución:

$$1, \qquad 5, \qquad -2, \qquad -10$$

188. *Dada la ecuación cuadrática ordinaria*

$$x^2 + px + p = 0$$

Se pregunta: 1.° *¿Qué valor hay que dar a* p *y* q *para que las raíces sean precisamente* p *y* q*?* 2.° *Formar la ecuación cuadrática que tenga por raíces los cuadrados de las raíces de la dada.* 3.° *Dando a* p *un valor determinado, ¿qué valor hay que dar a* q *para que una raíz sea doble de la otra?* 4.° *Valor que hay dar a* q *cuando* p $= -2$ *para que una raíz sea el cuadrado de la otra.*

Resolución:

1.°

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = p + q = -p \\ x_1 x_2 = \; p\,q \; = q \end{array}\right\} \begin{array}{ll} p = 0; & q = \;\;0 \\ p = 1; & q = -2 \end{array}$$

2.°

$$\left.\begin{array}{l} x^2_1 + x^2_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2\,x_1 x_2 = p^2 - 2\,q \\ x^2_1 \cdot x^2_2 = \qquad (x_1\,x_2)^2 \qquad = q^2 \end{array}\right\} x^2 - (p^2 - 2\,q)\,x + q^2 = 0$$

3.°

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2\,x_1 = -p = 3\,x_1 \\ \\ x_1 \cdot 2\,x_1 = 2\,x^2_1 = q \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{p}{3} \\ \\ \dfrac{2\,p^2}{9} = q \end{array}\right\} q = \frac{2}{9}\,p^2$$

4.°

$$x^2 - 2\,x + q = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2_1 + x_1 = 2 \\ x^3_1 = q \end{array}\right\} x^2_1 + x_1 - 2 = 0; \quad x_1 = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -2 \end{array}\right. \qquad x^3_1 = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -8 \end{array}\right.$$

$$q = 1; \quad q = -8$$

Solución:

1.° $\mathbf{p = 1; \quad q = -2}$

2.° $\mathbf{x^2 - (p^2 - 2\,q)\,x + q^2 = 0}$

3.° $\mathbf{q = \dfrac{2}{9}\,p^2}$

4.° $\mathbf{q = 1; \quad q = -8}$

189. *Resolver la ecuación*

$$\frac{x - 1}{2\,x - 1} + \frac{2\,x + 1}{x - 1} = m$$

y encontrar los límites entre los que puede variar m *para que la ecuación tenga raíces reales.*

Resolución:

$$(x - 1)^2 + (2\,x + 1)(2\,x - 1) = m\,(2\,x - 1)(x - 1)$$

$$(5 - 2\,m)\,x^2 + (3\,m - 2)\,x - m = 0$$

$$x = \frac{2 - 3\,m \pm \sqrt{m^2 + 8\,m + 4}}{10 - 4\,m} \qquad (1)$$

para que las raíces sean reales

$$m^2 + 8m + 4 \geqslant 0, \qquad m \leqslant -4 - 2\sqrt{3}, \qquad m \geqslant -4 + 2\sqrt{3}$$

Solución:

$$\mathbf{x = \frac{2 - 3\,m \pm \sqrt{m^2 + 8\,m + 4}}{10 - 4\,m}}$$

$$\mathbf{m \leqslant -4 - 2\sqrt{3}; \qquad m \geqslant -4 + 2\sqrt{3}}$$

190. *Dada la ecuación*

$$2mx^2 - 2x - 3m - 2 = 0$$

Calcular m *en los casos siguientes:*

1.° *Para que una raíz sea nula y calcular la otra raíz.*

2.° *Para que admita la solución* $x = \infty$, *y calcular la otra raíz.*

3.° *Para que una de las raíces sea superior y otra inferior a la unidad.*

RESOLUCIÓN:

1.° $3m+2=0$; $m=-2/3$ y queda la ecuación $2x+3=0$; $x=-3/2$

2.° $m=0$ y queda la ecuación $x+1=0$; $x=-1$

3.° Se ha de verificar que $m \cdot f(1)<0$

o sea,

$$m(-m-4)<0; \qquad m(m+4)>0; \qquad m>0, \quad m<-4$$

Solución:

1.° $\quad \mathbf{m=-\frac{2}{3}}, \quad \mathbf{x=-\frac{3}{2}}$

2.° $\quad \mathbf{m=0} \quad \mathbf{x=-1}$

3.° $\quad \mathbf{m>0} \quad \mathbf{m<-4}$

191. *Dada la ecuación*

$$4x^2-10(2m+1)x+14m+5=0$$

se pide:

1.° *Demostrar que tiene dos raíces reales distintas para todo valor real de* m.

2.° *Hallar el valor de* m *que hace mínima la diferencia de las raíces y calcular el valor de éste mínimo.*

3.° *Determinar* m *para que las dos raíces verifiquen la relación*

$$x_1{}^2+x_2{}^2=1$$

y calcular los correspondientes valores de x_1 *y* x_2.

RESOLUCIÓN:

1.° $\Delta=100m^2+44m+5$ que es un trinomio siempre positivo (ya que sus raíces son imaginarias y $a>0$), luego al ser $\Delta>0$ sus raíces son siempre reales y distintas.

2.° La diferencia de las raíces es $D=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$ que es mínima al mismo tiempo que Δ, o sea para $m=-\frac{44}{200}=-\frac{11}{50}$ y la diferencia vale $D=\frac{1}{5}$.

3.° $$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{25(2m+1)^2}{4}-\frac{14m+5}{2}=$$

$$=\frac{100m^2+72m+15}{4}=1$$

bastará resolver la ecuación

$$100m^2+72m+11=0 \qquad m=-\frac{1}{2} \qquad m=-\frac{11}{50}$$

para $\quad m=-\frac{1}{2}, \quad x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

» $\quad m=-\frac{11}{50}, \quad x_1=\frac{3}{5}, \quad x_2=\frac{4}{5}$

Solución:

2.° **para** $\mathbf{m=-\frac{11}{50}}; \quad \mathbf{x_1-x_2=\frac{1}{5}}$

3.° $$\left\{\begin{array}{lll} \mathbf{m=-\frac{1}{2}}, & \mathbf{x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}}, & \mathbf{x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ \mathbf{m=-\frac{11}{50}}, & \mathbf{x_1=\frac{3}{5}}, & \mathbf{x_2=\frac{4}{5}} \end{array}\right.$$

192. *Resolver el sistema de inecuaciones*

$$\left.\begin{array}{r} \frac{9}{x}<8-\frac{7}{x+2} \\ x>\frac{11x+24}{8x+11} \end{array}\right\}$$

Resolución :

Resolveremos cada inecuación separadamente y luego compararemos resultados

La primera, quitando denominadores nos da los dos sistemas

$$\left.\begin{array}{l} 4x^2-9>0 \\ x(x+2)>0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} 4x^2-9<0 \\ x(x+2)<0 \end{array}$$

cuyas soluciones son :

$$x<-2, \quad x>\frac{3}{2} \qquad -\frac{3}{2}<x<0 \qquad \text{(A)}$$

De la segunda inecuación se obtiene al quitar denominadores

$$\left.\begin{array}{l} x^2-3>0 \\ 8x+11>0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} x^2-3<0 \\ 8x+11<0 \end{array}$$

cuyas soluciones son :

$$x>\sqrt{3} \qquad -\sqrt{3}<x<-\frac{11}{8} \qquad \text{(B)}$$

comparando los resultados que verifiquen a (A) y (B) obtenemos la solución

Solución:

$$\mathbf{x>\sqrt{3}}, \qquad -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}<\mathbf{x}<-\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{8}}$$

193. *Dada la ecuación*

$$x^2-(8+5i)x+8+26i=0$$

Hallar sus raíces y determinar otra compleja tal que su afijo y los de aquellas dos raíces sean los vértices de un triángulo equilátero.

Resolución :

$$x=\frac{8+5i\pm\sqrt{64+80i-25-32-104i}}{2} \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1=6+i \\ x_2=2+4i \end{array}\right.$$

Las coordenadas de las raíces son (6,1) (2,4) y llamando (a, b) a las que nos piden

$$(a-6)^2+(b-1)^2=(a-2)^2+(b-4)^2=(6-2)^2+(1-4)^2$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2-12a-2b=-12 \\ a^2+b^2-4a-8b=5 \end{array}\right\} \qquad a=\frac{8\pm3\sqrt{3}}{2}, \qquad b=\frac{5\pm4\sqrt{3}}{2}$$

Solución:

$$\frac{\mathbf{8+3\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{5+4\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{i}$$

$$\frac{\mathbf{8-3\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{5-4\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{i}$$

194. *La ecuación*

$$9x^4-27x^3+47x^2-42x+18=0$$

tiene cuatro raíces imaginarias de la forma $a_1\pm b_1 i$, $a_2\pm b_2 i$.

Sabiendo que se verifica que

$$a_1^2+b_1^2=1, \qquad a_2^2+b_2^2=2$$

calcular sus raíces.

Resolución :

Apliquemos las fórmulas de Cardano

$$\left.\begin{array}{r} 2(a_1+a_2)=3 \\ 3+4a_1a_2=\dfrac{47}{9} \\ 2a_2(a_1^2+b_1^2)+2a_1(a_2^2+b_2^2)=\dfrac{42}{9} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} a_1+a_2=\dfrac{3}{2} \\ a_1a_2=\dfrac{5}{9} \\ 2a_1+a_2=\dfrac{7}{3} \end{array}\right\} \quad a_1=\frac{5}{6}\,; \qquad a_2=\frac{2}{3}$$

que llevados a las relaciones dadas, dan

$$a_1 = \frac{5}{6}, \qquad b_1 = \sqrt{1 - a_1^2} = \pm \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$a_2 = \frac{2}{3}, \qquad b^2 = \sqrt{2 - a_2^2} = \pm \frac{\sqrt{14}}{3}$$

Solución:

$$\mathbf{\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{11}}{6}\, i\,; \qquad \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{14}}{3}\, i}$$

195. *Calcular* $(1+i)^5 + (1-i)^5$ *sin desarrollar por el binomio de Newton.*

Resolución:

La suma pedida es la suma S_5 de las quintas potencias de las raíces de la ecuación de segundo grado, de raíces $1 \pm i$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

funciones simétricas de las raíces:

$S_1 - 2 = 0$	de	donde	$S_1 = 2$
$S_2 - 2S_1 + 4 = 0$	»	»	$S_2 = 0$
$S_3 - 2S_2 + 2S_1 = 0$	»	»	$S_3 = -4$
$S_4 - 2S_3 + 2S_2 = 0$	»	»	$S_4 = -8$
$S_5 - 2S_4 + 2S_3 = 0$	»	»	$S_5 = -8$

Solución:

$$\mathbf{-8}$$

196. *Designando por* 1, α_1, α_2, ..., α_{n-1} *las* n *raíces de* $\sqrt[n]{1}$, *calcular la suma de las* n*-ésimas potencias de dichas raíces.*

Resolución:

Foramaremos las funciones simétricas de la ecuación $x^n - 1 = 0$

$$\left.\begin{aligned} &S_1 + 0 = 0 \\ &S_2 + 0\,S_1 + 0 = 0 \\ &S_3 + 0\,S_2 + 0\,S_1 = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &S_n + 0\,S_{n-1} + 0\,S_{n-2} + \dots - n = 0 \end{aligned}\right\}$$

de donde

$$S_1 = S_2 = \dots = S_{n-1} = 0\,; \qquad S_n = n$$

y en general

$$1^K + \alpha_1{}^K + \alpha_2{}^K + \dots + \alpha_{n-1}{}^K = \begin{cases} n & \text{para } k = \dot{n} \\ 0 & \text{» } \quad k \neq \dot{n} \end{cases}$$

Nota. Este problema se aplicó en el núm. 125.

Solución:

$$\textbf{Si} \quad k = \dot{n} \quad 1^K + \alpha_1{}^K + \alpha_2{}^K + \dots + \alpha_{n-1}{}^K = n$$

$$\textbf{Si} \quad k \neq \dot{n} \quad 1^K + \alpha_1{}^K + \alpha_2{}^K + \dots + \alpha_{n-1}{}^K = 0$$

197. *Resolver el siguiente sistema*

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 + 4xy + 3y^2 - 15x - 9y &= 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 10x + 2y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Resolución:

Ordenando respecto a x

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 + (4y - 15)x + (3y^2 - 9y) &= 0 \\ x^2 - (2y + 10)x + (y^2 + 2y) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

formaremos la eliminante de Bezout

$$\begin{vmatrix} 3 & 3y^2 - 9y \\ 1 & y^2 + 2y \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} 3 & 4y - 15 \\ 1 & -2y - 10 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4y - 15 & 3y^2 - 9y \\ -2y - 10 & y^2 + 2y \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

la raíz común, es

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3y^2 + 9y \\ 1 & -y^2 - 2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4y - 15 \\ 1 & -2y - 10 \end{vmatrix}} = \frac{3y}{2y + 3} \quad (2)$$

desarrollando (1) obtenemos la eliminante en «y»

$$y^4 + 2y^3 - 9y^2 - 18y = 0$$

cuyas raíces son:

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = 3, \qquad y_3 = -2, \qquad y_4 = -3$$

que sustituidos en (2) nos dan los correspondientes valores de x.

Solución:

$$\mathbf{x_1 = 0} \qquad \mathbf{y_1 = 0}$$
$$\mathbf{x_2 = 1} \qquad \mathbf{y_2 = 3}$$
$$\mathbf{x_3 = 6} \qquad \mathbf{y_3 = -2}$$
$$\mathbf{x_4 = 3} \qquad \mathbf{y_4 = -3}$$

198. *En la ecuación*

$$x^3 + 2x - 1 = 0$$

cuyas raíces son x_1, x_2, x_3 *calcular*

$$\frac{1}{1 + x_1^2} + \frac{1}{1 + x_2^2} + \frac{1}{1 + x_3^2}$$

RESOLUCIÓN:

Haciendo $\dfrac{1}{1 + x^2} = y$ hallaremos la transformada en «y» y calcularemos la suma de las raíces Σy

$$\frac{1}{1 + x^2} = y; \qquad \begin{cases} y x^2 + \quad y - 1 = 0 \\ x^3 + 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

de la segunda multiplicada por y resto la primera multiplicada por x y obtenemos

$$(y + 1)x - y = 0; \qquad x = \frac{y}{y + 1}$$

que llevamos a la ecuación dada

$$y^3 + 2y(y+1)^2 - (y+1)^3 = 0, \qquad 2y^3 + y^2 - y - 1 = 0$$

y la suma de las raíces vale

$$-\frac{1}{2}$$

Solución:

$$\mathbf{-\frac{1}{2}}$$

199. *En la ecuación*

$$x^2 + x + 1 = 0$$

cuyas raíces son x_1, x_2, *calcular*

$$\frac{x_1^3}{x_1^2 + 1} + \frac{x_2^3}{x_2^2 + 1}$$

RESOLUCIÓN:

$$x_1 + x_2 = -1; \quad x_1 \cdot x_2 = 1; \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = -1$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 2$$

$$\frac{x_1^3}{x_1^2 + 1} + \frac{x_2^3}{x_2^2 + 1} = \frac{x_1^3 x_2^2 + x_1^3 + x_2^3 x_1^2 + x_2^3}{x_1^2 x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + 1} =$$

$$= \frac{x_1^2 x_2^2 (x_1 + x_2) + (x_1^3 + x_2^3)}{x_1^2 x_2^2 + (x_1^3 + x_2^3) + 1} = 1$$

Solución:

$$\mathbf{1}$$

200. *Sean* a, b, c *las raíces de la ecuación*

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

Hallar la ecuación cuyas raíces sean

$$\frac{1}{bc}; \qquad \frac{1}{ab}; \qquad \frac{1}{ca}$$

RESOLUCIÓN:

$$x^3 - \left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{ca}\right)x^2 + \left(\frac{1}{bc} \cdot \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} \cdot \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{ca}\right)x -$$

$$- \frac{1}{a^2 b^2 c^2} = 0$$

$$\frac{1}{bc} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{ca} = \frac{a + b + c}{abc} = \frac{p}{r}$$

$$\frac{1}{b\,c}\cdot\frac{1}{a\,b}+\frac{1}{b\,c}\cdot\frac{1}{c\,a}+\frac{1}{a\,b}\cdot\frac{1}{c\,a}=\frac{a\,c+a\,b+b\,c}{a^2\,b^2\,c^2}=\frac{q}{r^2}$$

$$\frac{1}{a^2\,b^2\,c^2}=\frac{1}{r^2}$$

la ecuación pedida será

$$x^3-\frac{p}{r}\,x^2+\frac{q}{r^2}\,x-\frac{1}{r^2}=0$$

Solución:

$$\mathbf{r^2x^3-prx^2+qx-1=0}$$

201. *Transformar la ecuación*

$$2x^4-16x^3+5x^2-4x+3=0$$

en otra, sin término de tercer grado.

RESOLUCIÓN:

Haremos el cambio $x=y-\dfrac{a_1}{4\,a_0}=y+2\,;\qquad y=x-2$

	2	−16	5	− 4	3
(2		4	−24	− 38	−84
	2	−12	−19	− 42	$\lvert$ −81
(2		4	−16	− 70	
	2	− 8	−35	$\lvert$ −112	
(2		4	− 8		
	2	− 4	$\lvert$ −43		
		4			
	$\lvert$ 2	$\lvert$ 0			

Solución:

Haciendo $\mathbf{x=y+2,\qquad 2y^4-43y^2-112y-81=0}$

202. *Sean* a, b, c *las raíces de la ecuación de tercer grado*

$$x^3+px+q=0$$

Se hace la transformación

$$y=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

se pide:

1.º *¿Cuántos valores distintos puede tomar?*

2.º *Formar la ecuación que tenga esos valores como raíces.*

RESOLUCIÓN:

1.º Los valores que puede tomar son

$$y_1=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\,;\qquad y_2=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$$

2.º La ecuación cuyas raíces son $y_1 y_2$ será

$$Y^2-(y_1+y_2)Y+y_1\cdot y_2=0 \qquad (1)$$

de la ecuación dada, deducimos por Cardano,

$$\left.\begin{aligned} a+b+c&=0 \qquad (2)\\ ab+bc+ac&=p \qquad (3)\\ abc&=-q \end{aligned}\right\}$$

calculemos y_1 e y_2:

$$y_1=\frac{a^2\,c+b^2\,a+c^2\,b}{a\,b\,c}=\frac{a^2\,c+b^2\,a+c^2\,b}{-q}\,,\qquad y_2=\frac{b^2\,c+a\,c^2+a^2\,b}{-q}$$

multipliquemos (2) · (3)

$$a^2b+ab^2+3abc+b^2c+bc^2+ac^2+a^2c=0$$

de donde

$$a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2=-3abc=3q$$

luego

$$y_1+y_2=\frac{a^2\,c+b^2\,a+c^2\,b+b^2\,c+a\,c^2+a^2\,b}{-q}=\frac{3\,q}{-q}=-3 \qquad (4)$$

efectuemos el producto $y_1\cdot y_2$

$$y_1\,y_2=\frac{(a^3\,b^3+a^3\,c^3+b^3\,c^3)+3\,a^2\,b^2\,c^2+a\,b\,c\,(a^3+b^3+c^3)}{q^2} \qquad (5)$$

calculemos los paréntesis de (5): elevando (3) al cuadrado

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2 = p^2 ;$$

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 = p^2-2abc(a+b+c) = p^2$$

multiplicando miembro a miembro por (3)

$$a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3+abc(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+ac^2+bc^2)=p^3$$

y teniendo en cuenta (4)

$$a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3=p^3+3q^2 \qquad (6)$$

por último calcularemos $a^3+b^3+c^3$, elevando al cubo (2)

$$a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)+6abc=0$$

y teniendo en cuenta (4)

$$a^3+b^3+c^3=-3q \qquad (7)$$

sustituyendo (6) y (7) en (5)

$$y_1 y_2 = \frac{p^3+9q^2}{q^2}$$

obteniéndose finalmente

Solución:

$$\mathbf{Y^2 - 3Y + \frac{p^3+9q^2}{q^2} = 0}$$

203. *Transformar la ecuación*

$$x^4+2x^3-13x^2-38x-24=0$$

en otra cuyas raíces sean las de la dada disminuidas en dos unidades.

Resolución:

Efectuaremos la sustitución de Horner

	1	2	−13	−38	−24
2)		2	8	−10	−96
	1	4	−5	−48	−120
2)		2	12	14	
	1	6	7	−34	
2)		2	16		
	1	8	23		
2)		2			
		10			
	1				

Solución:

$$\mathbf{x^4+10x^3+23x^2-34x-120=0}$$

204. *Transformar la ecuación*

$$x^4+7x^3+17x^2+17x+6=0$$

en otra cuyas raíces sean los cuadrados de las de la dada.

Resolución:

1	7	17	17	6
1	−49	289	−289	36
	34	−238	204	
		12		
1	−15	63	−85	36

Solución:

$$\mathbf{x^4-15x^3+63x^2-85x+36=0}$$

205. *Dada la ecuación*

$$x^4 - 3x^3 + 2x - 1 = 0$$

hallar otra ecuación cuyas raíces sean los cuadrados de las de la dada.

RESOLUCIÓN :

1	− 3	0	2	− 1
1	− 9	0	− 4	1
	0	12	0	
1	− 9	12	− 4	1

Solución:

$$\mathbf{x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 4x + 1 = 0}$$

206. *Transformar la ecuación*

$$x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

en otra cuyas raíces sean las cuartas potencias de las de la ecuación dada.

RESOLUCIÓN :

Hagamos primeramente la transformación en los cuadrados de las raíces

1	− 1	2	− 3	1
1	− 1	4	− 9	1
	4	− 6	4	
		2		
1	3	0	− 5	1

$$x^4 + 3x^3 - 5x + 1 = 0$$

hagamos nuevamente la transformación

1	3	0	− 5	1
1	− 9	0	− 25	1
	0	30	0	
		2		
1	− 9	32	− 25	1

Solución:

$$\mathbf{x^4 - 9x^3 + 32x^2 - 25x + 1 = 0}$$

207. *Calcular* $\sum_{n=1}^{n=3} \frac{1}{3 - x_n}$ *en la ecuación* $x^3 + x + 1 = 0$.

RESOLUCIÓN :

Si hacemos $\frac{1}{3 - x} = y$, habrá que hallar la suma de las raíces Σy en la transformada en y.

Despejando $x = 3 - \frac{1}{y}$

bastará hacer las transformaciones

$x - 3 = z$ disminuir las raíces en 3 unidades

$z = - u$ transformada en $- z$

$u = \frac{1}{y}$ transformación recíproca

	1	0	1	1
3)		3	9	30
	1	3	10	31
3)		3	18	
	1	6	28	
3)		3		
	1	9		

$$z^3 + 9z^2 + 28z + 31 = 0$$
$$u^3 - 9u^2 + 28z - 31 = 0$$
$$31y^3 - 28y^2 + 9y - 1 = 0$$

donde

$$\Sigma y = \Sigma \frac{1}{3-x} = \frac{28}{31}$$

2.° Método: como

$$x = \frac{3y-1}{y}$$

sustituimos en

$$x^3+x+1=0$$

$$(3y-1)^3+(3y-1)y^2+y^3=0;$$

$$31y^3-28y^2+9y-1=0; \quad \Sigma y = \frac{28}{31}$$

Solución:

$$\mathbf{\frac{28}{31}}$$

208. *Dada la ecuación*

$$x^4-2x^3+3x^2-x+2=0$$

Hallar otra ecuación en «z» cuyas raíces estén relacionadas con la ecuación dada por la relación

$$z = \frac{x-2}{x+1}$$

RESOLUCIÓN:

Despejando

$$x = \frac{z+2}{1-z} = -1 - \frac{3}{z-1}$$

se pueden hacer escalonadamente los siguientes cambios

$x+1=t$	aumentar las raíces en 1 unidad
$t=-u$	transformada en $-t$
$u=3v$	las raíces divididas por 3
$v=\frac{1}{w}$	recíproca
$w+1=z$	aumentar las raíces en 1 unidad

	1	−2	3	−1	2
−1)		−1	3	−6	7
	1	−3	6	−7	9
−1)		−1	4	−10	
	1	−4	10	−17	
−1)		−1	5		
	1	−5	15		
−1)		−1			
	1	−6			

$$t^4 - 6t^3 + 15t^2 - 17t + 9 = 0$$
$$u^4 + 6u^3 + 15u^2 + 17u + 9 = 0$$
$$81v^4 + 162v^3 + 135v^2 + 51v + 9 = 0$$
$$9w^4 + 51w^3 + 135w^2 + 162w + 81 = 0$$

	9	51	135	162	81
−1)		−9	−42	−93	−69
	9	42	93	69	12
−1)		−9	−33	−60	
	9	33	60	9	
−1)		−9	−24		
	9	24	36		
−1)		−9			
	9	15			

Solución:

$$\mathbf{9z^4+15z^3+36z^2+9z+12=0}$$

209. *Transformar la ecuación*

$$x^3-2x^2+3x-1=0$$

1.° *En otra cuyas raíces sean la suma de cada dos de la dada.*

2.° *En otra cuyas raíces sean la media aritmética de cada dos de la dada.*

RESOLUCIÓN :

1.° Bastará eliminar x entre

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \frac{f(y-x)-f(x)}{y-2x} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$f(y-x) = (y-x)^3 - 2(y-x)^2 + 3(y-x) - 1 =$$

$$= y^3 - (3x+2)y^2 + (3x^2+4x+3)y - (x^3+2x^2+3x+1)$$

$$f(y-x) - f(x) = y^3 - (3x+2)y^2 + (3x^2+4x+3)y - 2x^3 - 6x$$

$$\frac{f(y-x)-f(x)}{y-2x} = x^2 - yx + (y^2-2y+3) = 0$$

Eliminaremos x entre

$$\left\{\begin{aligned} & x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0 \\ & x^2 - yx + (y^2-2y+3) = 0 \end{aligned}\right.$$

restando de la primera, la segunda multiplicada por x

$$\left.\begin{aligned} (y-2)x^2 - (y^2-2y)x - 1 &= 0 \\ x^2 - yx + (y^2-2y+3) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

cuya eliminante es

$$\begin{vmatrix} y-2 & -1 \\ 1 & y^2-2y+3 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} y-2 & y^2-2y \\ 1 & y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y^2-2y & -1 \\ y & y^2-2y+3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(y^3 - 4y^2 + 7y - 5)^2 = 0$$

$$y^3 - 4y^2 + 7y - 5 = 0$$

2.° Si hacemos $y = 2z$, obtendremos la ecuación pedida

$$8z^3 - 16z^2 + 14z - 5 = 0$$

Solución:

1.° $\mathbf{x^3 - 4x^2 + 7x - 5 = 0}$

2.° $\mathbf{8x^3 - 16x^2 + 14x - 5 = 0}$

210. *Transformar la ecuación*

$$x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$$

1.° *En otra cuyas raíces sean las diferencias de cada dos raíces de la ecuación dada.*

2.° *En otra cuyas raíces sean los cuadrados de las diferencias de cada dos de la ecuación dada.*

RESOLUCIÓN :

1.° Bastará eliminar la x *entre*

$$\left.\begin{aligned} f(x+y) &= 0 \\ f(x) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$f(x+y) = (x+y)^3 + (x+y)^2 - 2(x+y) - 3 =$$

$$= x^3 + (3y+1)x^2 + (3y^2+2y-2)x + (y^3+y^2-2y-3) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} x^3 + (3y+1)x^2 + (3y^2+2y-2)x + (y^3+y^2-2y-3) &= 0 \\ x^3 + x^2 - 2x - 3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

restando de la primera la segunda

$$3yx^2 + (3y^2+2y)x + (y^3+y^2-2y) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 + (3y+2)x + (y^2+y-2) &= 0 \\ x^3 + x^2 - 2x - 3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

restando de la primera multiplicada por x, la segunda multiplicada por 3

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 + (3y+2)x + (y^2+y-2) &= 0 \\ (3y-1)x^2 + (y^2+y+4)x + 9 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

cuya eliminante es

$$\begin{vmatrix} 3 & y^2+y-2 \\ 3y-1 & 9 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} 3 & 3y+2 \\ 3y-1 & y^2+y+4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3y+2 & y^2+y-2 \\ y^2+y+4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 3y^6 - 42y^4 + 148y^2 + 261 = 0$$

2.° Si hacemos $y^2 = z$, obtenemos la ecuación pedida

$$3z^3 - 42z^2 + 148z + 261 = 0$$

Solución:

1.° $\mathbf{3x^6 - 42x^4 + 148x^2 + 261 = 0}$

2.° $\mathbf{3x^3 - 42x^2 + 148x + 261 = 0}$

211. *Transformar la ecuación*

$$x^3+x^2-2x-1=0$$

1.° *En otra cuyas raíces sean los productos de cada dos raíces de la ecuación dada.*

2.° *En otra cuyas raíces sean las medias geométricas de cada dos raíces de la ecuación dada.*

RESOLUCIÓN:

1.° Bastará eliminar la x entre

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=0 \\ \dfrac{f\left(\dfrac{y}{x}\right)-f(x)}{y-x^2}=0 \end{array}\right\}$$

$$f\left(\frac{y}{x}\right)-f(x)=\frac{y^3}{x^3}+\frac{y^2}{x^2}-2\,\frac{y}{x}-x^3-x^2+2\,x$$

$$\frac{f\left(\dfrac{y}{x}\right)-f(x)}{y-x^2}=0=y^2+(x^2+x)\,y+x^4+x^3-2\,x^2$$

eliminaremos x, entre

$$\left.\begin{array}{r} x^3+x^2-2x-1=0 \\ x^4+x^3+(y-2)x^2+yx+y^2=0 \end{array}\right\}$$

de la segunda restamos la primera multiplicada por x

$$\left.\begin{array}{r} yx^2+(y+1)x+y^2=0 \\ x^3+x^2-2x-1=0 \end{array}\right\}$$

sumando a la primera la segunda multiplicada por y^2

$$y^2x^3+(y^2+y)x^2-(2y^2-y-1)x=0$$

dividimos por x

$$\left\{\begin{array}{l} y^2x^2+(y^2+y)x-(2y^2-y-1)=0 \\ yx^2+(y+1)x+y^2=0 \end{array}\right.$$

cuya eliminante de Bezout es

$$\begin{vmatrix} y^2 & -2\,y^2+y+1 \\ y & y^2 \end{vmatrix}^2-\begin{vmatrix} y^2 & y^2+y \\ y & y+1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y^2+y & -2\,y^2+y+1 \\ y+1 & y^2 \end{vmatrix}=0=$$

$$=(y^4+2\,y^3-y^2-y)^2=0$$

la transformada es

$$y^3+2y^2-y-1=0$$

2.° Si en la ecuación obtenida hacemos $y=z^2$ obtenemos la transformada

$$z^6+2z^4-z^2-1=0$$

Solución:

1.° $\mathbf{x^3+2x^2-x-1=0}$

2.° $\mathbf{x^6+2x^4-x^2-1=0}$

212. *Resolver la ecuación*

$$x^3-201x+770=0$$

RESOLUCIÓN:

$$p=-201\,;\quad q=770\,;$$

$$\frac{p^3}{27}=-300\,763\,;\qquad -\frac{q}{2}=-385\,;\qquad \frac{q^2}{4}=148\,225$$

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-152\,538\,;\qquad \Delta=\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=390{,}561135\,i$$

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=-385+390{,}561135\,i$$

$$v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{2}+\frac{p^3}{27}}=-385-390{,}561135\,i$$

$$|\,u^3\,|=|\,v^3\,|=\sqrt{300\,763}\,;\qquad \log\,|\,u\,|=0{,}9\,130377$$

$$\log\operatorname{tg}(\arg u^3)=\log 390{,}561135-\log 385=0{,}0062283$$

$$\arg u^3 = 180° - 45° 34' 39'' = 134° 35' 21'' ;$$

$$\arg v^3 = 360° - \arg u^3 = 225° 24' 39''$$

$$\arg u_1 = 44° 51' 47'' \qquad \arg v_1 = 315° 8' 13''$$

$$\arg u_2 = 164° 51' 47'' \qquad \arg v_2 = 195° 8' 13''$$

$$\arg u_3 = 284° 51' 47'' \qquad \arg v_3 = 75° 8' 13''$$

las soluciones serán:

$$x_1 = 2u_1 \cos \alpha_1 = 2 \cdot \text{antilog } (0{,}9130877 + \bar{1}{,}8505206) = 11{,}60348$$

e igual las otras dos

Solución:

$$\mathbf{x_1 = 11{,}60348}, \qquad \mathbf{x_2 = -15{,}80272}, \qquad \mathbf{x_3 = 4{,}19924}$$

213. *Resolver la ecuación*

$$144x^3 - 958{,}09x + 847{,}2 = 0$$

RESOLUCIÓN:

$$x^3 - \frac{958{,}09}{144} x + \frac{847{,}2}{144} = 0$$

Como $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, las tres raíces son reales y sabemos que

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}; \qquad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

el módulo de u^3 es

$$\rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{958{,}09^3}{27}} = 3{,}302812$$

y el argumento de u^3 es

$$\cos \alpha = -\frac{q}{2\rho}; \qquad \log \cos (\pi - \alpha) = \log \frac{q}{2\rho} = \bar{1}{,}9497095$$

de donde

$$\pi - \alpha = 27° 2' 39'',62 ; \qquad \alpha = 152° 58' 20'',38$$

las tres raíces de la ecuación dada vienen dadas por

$$x_1 = 2\sqrt[3]{\rho} \cdot \cos \frac{\alpha}{3}; \qquad x_2 = 2\sqrt[3]{\rho} \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{3} + 120°\right);$$

$$x_3 = 2\sqrt[3]{\rho} \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{3} + 240°\right)$$

o sea,

$$x_1 = 2\sqrt[3]{\rho} \cdot \cos (50° 59' 26'',79); \qquad x_2 = -2\sqrt[3]{\rho} \cdot \cos (9° 0' 33'',21);$$

$$x_3 = 2\sqrt[3]{\rho} \cdot \cos (69° 0' 33'',21)$$

de donde aplicando logaritmos se obtienen:

Solución:

$$\mathbf{x_1 = 1{,}87500}$$
$$\mathbf{x_2 = -2{,}94166}$$
$$\mathbf{x_3 = 1{,}06666}$$

214. *Resolver la ecuación*

$$2x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 12 = 0$$

RESOLUCIÓN:

Los límites de las raíces son $-2 \leq x \leq 3$

$$\left.\begin{aligned} F(1) &= 3 \\ F(-1) &= 5 \end{aligned}\right\}$$

2, no es raíz, ya que $2+1=3$ no divide a $F(-1)$; probemos -2, ya que $-2+1$ divide a $F(-1)$ y $-2-1$ divide a $F(1)$; dividiendo por $x+2$

	2	1	−10	−2	12
−2)		−4	6	8	−12
	2	−3	−4	6	0

se obtiene la ecuación

$$2x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0$$

que no tiene raíces enteras; probando las fraccionarias se ve que es raíz $x = \dfrac{3}{2}$ y dividiendo por $x - \dfrac{3}{2}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & -4 & 6 \\ \frac{3}{2} & & 3 & 0 & -6 \\ \hline & 2 & 0 & -4 & \vert\, 0 \end{array} \qquad x^2 - 2 = 0, \quad x = \pm\sqrt{2}$$

Resolución:

$$\mathbf{x_1 = -2}, \quad \mathbf{x_2 = \frac{3}{2}}, \quad \mathbf{x_3 = \sqrt{2}}, \quad \mathbf{x_4 = -\sqrt{2}}$$

215. *Hallar los coeficientes de la ecuación de coeficientes reales*

$$Ax^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

para que los afijos de las tres raíces sean los vértices de un triángulo equilátero de lado 2.

Resolución:

Resolveremos el problema aplicando la teoría de ecuaciones (también puede resolverse más sencillo como aplicación de las transformaciones de variable compleja).

Al ser los coeficientes reales, una raíz será real y las otras dos imaginarias conjugadas de la forma

$$x_1 = a + \sqrt{3}, \qquad x_2 = a + i, \qquad x_3 = a - i$$

Fórmulas de Cardano:

$$\left.\begin{aligned} 3a + \sqrt{3} &= -\frac{A}{A} = -1 \qquad &(1)\\ 3a^2 + 2a\sqrt{3} + 1 &= \frac{B}{A} \qquad &(2)\\ a^3 + a^2\sqrt{3} + a + \sqrt{3} &= -\frac{C}{A} \qquad &(3) \end{aligned}\right\}$$

De (1) $a = \dfrac{-1 - \sqrt{3}}{3}$ que sustituyendo en (2) se obtiene

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{3}$$

llevando el valor de $a = \dfrac{-1 - \sqrt{3}}{3}$ a (3) se obtiene

$$\frac{C}{A} = \frac{1 - 24\sqrt{3}}{27}$$

y la ecuación pedida será

$$27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 - 24\sqrt{3} = 0$$

Otra disposición puede tener el triángulo y las raíces serán

$$x_1 = a - \sqrt{3}, \qquad x_2 = a + i, \qquad x_3 = a - i$$

y procediendo de la misma forma, obtendríamos la ecuación

$$27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 + 24\sqrt{3} = 0$$

Solución:

$$\mathbf{27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 \pm 24\sqrt{3} = 0}$$

216. *Hallar la condición para que los puntos cuyas abcisas sean las raíces de la ecuación*

$$Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E = 0$$

formen una cuaterna armónica.

Resolución:

Por ser una cuaterna armónica

$$2(x_1x_2 + x_3x_4) - (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 0 \qquad (1)$$

Fórmulas de Cardano

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-\dfrac{4\,B}{A} & (2) \\ x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_3x_4=\dfrac{6\,C}{A} & (3) \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_2x_3x_4=-\dfrac{4\,D}{A} & (4) \\ x_1x_2x_3x_4=\dfrac{E}{A} & (5) \end{cases}$$

llamado

$$x_1+x_2=s\,; \qquad x_1\cdot x_2=p$$

de (2)

$$x_3+x_4=-\frac{4\,B}{A}-s$$

de (5)

$$x_3\,x_4=\frac{E}{p\,A}$$

estos valores llevados a (1), (3) y (4) nos dan un sistema de tres ecuaciones en s y p. Eliminando s y p nos queda la condición pedida

Solución:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

217. *Discutir la naturaleza de las raíces de la ecuación*

$$x^3-4x^2+5x+\lambda=0$$

Resolución :

$$f'(x)=0=3\,x^2-8\,x+5=0\ \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Sucesión de Rolle

	valores de x	$-\infty$	1	$\frac{5}{3}$	∞	
	valores de $f(x)$	$-$	$\lambda+2$	$\frac{50}{27}+\lambda$	$+$	
para	$\lambda<-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	1 raíz real
»	$-2<\lambda<-\frac{50}{27}$	$-$	$+$	$-$	$+$	3 raíces reales
	$\lambda>-\frac{50}{27}$	$-$	$+$	$+$	$+$	1 raíz real

para $\lambda=-2$ y para $\lambda=-\dfrac{50}{27}$ una raíz doble

Solución:

$\lambda<-2$ **1 raíz real**

$-2<\lambda<-\dfrac{50}{27}$ **3 raíces reales**

$\lambda>-\dfrac{50}{27}$ **1 raíz real**

218. *Número de raíces reales de la ecuación*

$$x^4-15x^2+\lambda x-12=0$$

Resolución :

Discutamos la ecuación

$$f(x)=x^3-15\,x+\lambda-\frac{12}{x}=0$$

$$f'(x)=3\,x^2-15+\frac{12}{x^2}=0\,, \qquad 3\,x^4-15\,x^2+12=0$$

raíces $\qquad x=\pm\,2\,, \qquad x=\pm\,1$

discontinuidad de $f(x)$ para $x=0$

Sucesión de Rolle

x	$-\infty$	-2	-1	$-\varepsilon$	ε	1	2	∞
valores de $f(x)$	$+$	$\lambda+28$	$\lambda+26$	$+$	$-$	$\lambda-26$	$\lambda-28$	$+$

Solución:

para	$\lambda<-28$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	**2 reales**
	$\lambda=-28$	$-$	0	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	**4 reales, 1 doble**
	$-28<\lambda<-26$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	**4 reales**
	$\lambda=-26$	$-$	$+$	0	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	**4 reales, 1 doble**
	$-26<\lambda<26$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	**2 reales**
	$\lambda=26$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	0	$-$	$+$	**4 reales, 1 doble**
	$26<\lambda<28$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	**4 reales**
	$\lambda=28$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	0	$+$	**4 reales, 1 doble**
	$\lambda>28$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	**2 reales**

219. *Hallar el número de raíces reales de la ecuación*

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}-1=0$$

Resolución:

La ecuación desarrollada es de cuarto grado. Aplicaremos el recíproco del teorema de Rolle, teniendo en cuenta que $f(x)$ es discontinua para $x=-3$, y para $x=1$

$$f'(x)=-\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{2}{(x+3)^3}=0 \quad \text{o sea} \quad (x-1)^3+(x+3)^3=0$$

cuya única raíz real es $x=-1$

valores de x	$-\infty$	$-3-\varepsilon$	$-3+\varepsilon$	-1	$1-\varepsilon$	$1+\varepsilon$	∞
signos de $f(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$

hay cuatro variaciones, luego cuatro raíces reales

Solución:

Las cuatro raíces son reales

220. *Hallar el número de raíces reales de la ecuación*

$$x^4-4x^3-2x^2+12x+\lambda=0$$

Resolución:

$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12=0$ raíces $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=3$

Sucesión de Rolle:

	$-\infty$	-1	1	3	∞
valores de $f(x)$	$+$	$\lambda-9$	$\lambda+7$	$\lambda-9$	$+$

para	$\lambda<-7$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	2 raíces reales $x_1<-1$, $x_2>3$
	$\lambda=-7$	$+$	$-$	0	$-$	$+$	4 raíces reales $x_1<-1$, $x_2=x_3=1$, $x_4>3$
	$-7<\lambda<9$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	4 raíces reales $x_1<-1$, $-1<x_2<1$, $1<x_3<3$, $x_4>3$
	$\lambda=9$	$+$	0	$+$	0	$+$	2 raíces dobles $x_1=x_2=-1$, $x_3=x_4=3$
	$\lambda>9$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	ninguna raíz real

Solución:

$\lambda<-7$ **2 raíces reales** $x_1<-1$, $x_2>3$

$\lambda=-7$ **4 raíces reales** $x_1<-1$, $x_2=x_3=1$, $x_4>3$

$-7<\lambda<9$ **4 raíces reales** $x_1<-1$, $-1<x_2<1$, $1<x_3<3$, $x_4>3$

$\lambda=9$ **2 raíces dobles** $x_1=x_2=-1$, $x_3=x_4=3$

$\lambda>9$ **ninguna raíz real**

221. *Discusión de la naturaleza de las raíces de la ecuación de tercer grado*

$$x^3+px+q=0$$

por el método de Sturm.

Resolución:

$$f(x) = x^3 + px + q$$
$$f'(x) = 3x^2 + p$$
$$X_1 = -2px - 3q$$
$$X_2 = -(4p^3 + 27q^2)$$

	$f(x)$	$f'(x)$	X_1	X_2
$-\infty$	$-$	$+$	p	$-\Delta$
$+\infty$	$+$	$+$	$-p$	$-\Delta$

Primer caso:

$\Delta = 4p^3 + 27q^2 < 0$ en cuyo caso $p < 0$

$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3 variaciones	TRES RAICES
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	0 variaciones	REALES

Segundo caso:

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 > 0$$

Si $p < 0$

$-$	$+$	$-$	$-$	2 variaciones
$+$	$+$	$+$	$-$	1 variación

Si $p > 0$

$-$	$+$	$+$	$-$	2 variaciones
$+$	$+$	$-$	$-$	1 variación

en ambos casos 1 raíz real y 2 imaginarias conjugadas.

Tercer caso:

$\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 0$ y, por tanto, $p < 0$ 1 raíz real doble y 1 raíz real

Si $p = q = 0$ tiene una raíz triple

Solución:

$\Delta = 4p^3 + 27q^2$
- $\Delta < 0$ **tres raíces reales distintas**
- $\Delta > 0$ **una raíz real y dos imaginarias conjugadas**
- $\Delta = 0$ **tres raíces reales (una doble)**

222. *Calcular por el método de Sturm las raíces reales de la ecuación*

$$f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

indicando el número de raíces positivas y negativas.

Resolución:

Formemos las funciones de Sturm

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 8x - 4 \tag{1}$$

1	1	−4	−4	1	4	3	−8	−4
4	4	−16	−16	4	1	1		
»	−3	8	4					
	1	−8	−12	4				
	4	−32	−48	16				
	»	−3	8	4				
		−35	−40	20				
		−7	−8	4				

$$X_1 = 7x^2 + 8x - 4 \tag{2}$$

4	3	−8	−4	7	8	−4
28	21	−56	−28	4	−11	
»	−32	16				
	−11	−40	−28			
	−77	−280	−196			
		88	−44			
		−192	−240			
		−4	−5			

$$X_2 = 4x + 5 \tag{3}$$

7	8	−4	4	5
28	32	−16	7	−3
»	−35			
	−3	−16		
	−12	−64		
	»	15		
		−1		

$$X_3 = +1$$

Las funciones de Sturn son:

$$\left\{\begin{aligned} f(x) &= x^4+x^3-4x^2-4x+1 \\ f'(x) &= 4x^3+3x^2-8x-4 \\ X_1 &= 7x^2+8x-4 \\ X_2 &= 4x+5 \\ X_3 &= 1 \end{aligned}\right.$$

	$f(x)$	$f'(x)$	X_1	X_2	X_3	
$-\infty$	+	−	+	−	+	4 variaciones
0	+	−	−	+	+	2 variaciones
∞	+	+	+	+	+	0 variaciones

Solución:

2 raíces reales positivas y

2 raíces reales negativas

223. *Aplicar el método de Sturm a averiguar el número de raíces reales positivas y negativas de la ecuación*

$$2x^5-15x^4+32x^3-9x^2-34x+24=0$$

Resolución:

$$f'(x) = 10\,x^4 - 60\,x^3 + 96\,x^2 - 18\,x - 34 = 0\,;$$

$$\frac{f'(x)}{2} = 5\,x^4 - 30\,x^3 + 48\,x^2 - 9\,x - 17 \qquad (1)$$

2	−15	32	−9	−34	24	5	−30	48	−9	−17
10	−75	160	−45	−170	120	2	−3			
»	60	−96	18	34						
	−15	64	−27	−136	120					
	»	−90	144	−27	−51					
		−26	117	−163	69					

$$X_1 = 26\,x^3 - 117\,x^2 + 163\,x - 69 \qquad (2)$$

5	−30	48	−9	−17	26	−117	163	−69
130	−780	1248	−234	−442	5	−15		
»	585	−815	345					
	−195	433	111	−442				
	−390	866	222	−884				
	»	−1755	2445	−1035				
		−889	2667	−1919				

$$X_2 = 889\,x^2 - 2667\,x + 1919 \qquad (3)$$

26	−117	163	−69	889	−2667	1919
26 · 889	−104013	144907	−61341	26	−39	
»	69342	−49894				
	−34671	95013	−61341			
	»	−104013	74841			
		−9000	13500			
		−2	3			

$$X_3 = 2\,x - 3 \qquad (4)$$

889	−2667	1919	2	−3
1778	−5334	3838	889	−2667
»	2667			
	−2667	3838		
	−5334	7676		
	»	−8001		
		−325		
		−1		

$$X_4 = +\,1 \qquad (5)$$

Funciones de Sturm

	$-\infty$	0	∞
$f(x)=2x^5-15x^4+32x^3-9x^2-34x+24$	$-$	$+$	$+$
$\frac{1}{2}f'(x)=5x^4-30x^3+48x^2-9x-17$	$+$	$-$	$+$
$X_1=26x^3-117x^2+163x-69$	$-$	$-$	$+$
$X_2=889x^2-2667x+1919$	$+$	$+$	$+$
$X_3=2x-3$	$-$	$-$	$+$
$X_4=1$	$+$	$+$	$+$
	5 variac.	4 variac.	0 variac.

Solución:

Las cinco raíces son reales, cuatro positivas y una negativa

224. *Calcular con eror menor que una milésima la raíz real de la ecuación*

$$x^3-5x-3=0$$

RESOLUCIÓN:

$$\left.\begin{matrix} f(2)<0 \\ f(4)>0 \end{matrix}\right\} \quad f(2,5)>0 \quad f(2,4)<0 \qquad \text{luego} \quad 2,4<x<2,5$$

como $f(x)$ y $f''(x)$ tienen el mismo signo para $x=2,5$, tendremos al aplicar el método de Newton

$$x_1=2,50-\frac{f(2,5)}{f'(2,5)}=2,4\dot{9}091\,; \qquad 2,49<x<2,50$$

una segunda sustitución da

$$x_2=2,50-\frac{f(2,5)}{f'(2,5)}=2,490\dot{9}$$

Solución:

2,490<x<2,491

225. *Dada la ecuación*

$$x^3-3x+1=0$$

hallar su raíz positiva comprendida entre 0 y 1 con error menor que una milésima.

RESOLUCIÓN:

$$\left.\begin{matrix} f(0,3)>0 \\ f(0,4)<0 \end{matrix}\right\} \quad \text{luego} \quad 0,3<x<0,4$$

como $f(x)$ y $f''(x)$ tienen el mismo signo para $x=0,3$, empezemos a aproximar desde $x=0,3$

$$x_1=0,3-\frac{f(0,3)}{f'(0,3)}=0,3\dot{4}6\,; \qquad 0,34<x_1<0,35$$

$$x_2=0,34-\frac{f(0,34)}{f'(0,34)}=0,347\dot{0}8$$

Solución:

0,347<x<0,348

226. *Calcular con eror menor que una milésima la raíz positiva de la ecuación*

$$x^4-6x+1=0$$

RESOLUCIÓN:

$$f(0,1)>0 \qquad f(0,2)<0 \quad \text{luego} \quad 0,1<x<0,2$$

aproximaremos por el método de Newton

$$\text{como} \quad \left\{\begin{matrix} f(0,1)>0 \\ f''(0,1)>0 \end{matrix}\right. \quad \text{tomaremos como valor inicial } 0,1$$

$$h_1=-\frac{f(0,1)}{f'(0,1)}=0,06 \quad \text{una primera aproximación es } 0,16<x<0,17$$

$$h_2=-\frac{f(0,16)}{f'(0,16)}=0.0067 \qquad 0,0166<x<0,0167$$

Solución:

0,0166<x<0,0167

227. *Calcular con eror menor que una milésima, por el método de aproximación de Newton, la raíz de la ecuación*

$$x \cdot lx - 1 = 0$$

RESOLUCIÓN :

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x\,l\,x - 1 \\ f'(x) = l\,x + 1 \end{array}\right\} \quad 1 < x < 2 \qquad f(2) > 0 \qquad f''(2) > 0$$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$\frac{f(x)}{f'(x)}$
2	0,386	1,693	0,22
1,78	0,0264	1,5766	0,0167
1,764	0,00929	1,5670	0,0001
1,7639	0,00009	1,56746	0,00006
1,76384			

Solución:

$$\mathbf{1{,}763 < x < 1{,}764}$$

228. *Hallar la raíz comprendida entre 1 y 2, de la ecuación*

$$x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$$

con error menor que 0,01 siguiendo el método de Lagrange y si es posible haciendo uso de las operaciones efectuadas, resolver la ecuación.

RESOLUCIÓN :

$$x = 1 + \frac{1}{y} \qquad (1)$$

	1	1	−1	−2	−2
1)		1	2	1	−1
	1	2	1	−1	−3
1)		1	3	4	
	1	3	4	3	
1)		1	4		
	1	4	8		
1)		1			
	1	5			

$$\varphi(y) = 3y^4 - 3y^3 - 8y^2 - 5y - 1 = 0; \quad 2 < y < 3; \quad y = 2 + \frac{1}{z} \qquad (2)$$

	3	−3	−8	−5	−1
2)		6	6	−4	−18
	3	3	−2	−9	−19
2)		6	18	32	
	3	9	16	23	
2)		6	30		
	3	15	46		
2)		6			
	3	21			

$$\psi(z) = 19z^4 - 23z^3 - 46z^2 - 21z - 3 = 0$$

$$2 < z < 3; \quad z = 2 + \frac{1}{u} \qquad (3)$$

	19	−23	−46	−21	−3
2)		38	30	−32	−106
	19	15	−16	−53	−109
2)		38	106	180	
	19	53	90	127	
2)		38	182		
	19	91	272		
2)		38			
	19	129			

$$\pi(u) = 109\,u^4 - 127\,u^3 - 272\,u^2 - 129\,u - 19 = 0$$

$$2 < u < 3\,; \qquad u = 2 + \frac{1}{v} \tag{4}$$

teniendo en cuenta (1), (2), (3) y (4)

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

la primera reducida cuyo denominador sea $\geq \sqrt{100}$ nos dará la raíz con $e < \frac{1}{100}$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{7}{5} \quad \frac{17}{12}, \qquad \frac{17}{12} = 1{,}4\dot{2}$$

ozservemos si el desarrollo en fracción continua, fuese por casualidad periódica mixta de período 2, y calculemos el valor de x

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + \dfrac{1}{y} \\[2ex] y = 2 + \dfrac{1}{y} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y^2 - 2\,y - 1 = 0 \qquad y = 1 + \sqrt{2} \\[2ex] x = \dfrac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} + 2)(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} \end{array}$$

si $\sqrt{2}$ fuese raíz de la ecuación también sería $-\sqrt{2}$ y la ecuación dada sería divisible por $x^2 - 2$ y vemos que en efecto

$$x^4 + x^3 - x^2 - 2\,x - 2 = (x^2 - 2)(x^2 + x + 1) = 0 \left\{\begin{array}{l} x^2 - 2 = 0, \quad x = \pm\sqrt{2} \\[1ex] x^2 + x + 1 = 0, \quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} \end{array}\right.$$

Solución:

$$\mathbf{x = 1{,}4\dot{2} \quad \text{con error} \quad < \frac{1}{100}}$$

$$\mathbf{x = \pm\sqrt{2}, \qquad x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i}$$

229. *Resolver la ecuación trascendente*

$$\cos x = 2x$$

con cuatro cifras decimales exactas.

Resolución:

La raíz se aproximará hallando gráficamente la intersección de las curvas

$$y = \cos x, \qquad y = 2x$$

una primera aproximación de $f(x) = \cos x - 2x$, es

$$0{,}45 < x < 0{,}46$$

$$\text{como} \left\{\begin{array}{l} f(0{,}46) < 0 \\ f''(0{,}46) < 0 \end{array}\right. \text{ comenzaremos a aproximar por } 0{,}46$$

$$x = 0{,}46 - \frac{f(0{,}46)}{f'(0{,}46)} = 0{,}46 - \frac{0{,}02403}{0{,}44411} = 0{,}450\dot{9}7 \text{ por exceso}$$

Solución:

$$\mathbf{x = 0{,}4509}$$

230. *Determinar la raíz de la ecuación trascendente*

$$x^x - 100\,x = 0$$

empleando la regla de falsa posición.

Resolución:

$$4 < x < 5$$

Emplearemos tres veces la regla de falsa posición

$$a = 4, \qquad b = 5, \qquad \alpha = f(a) = -144, \qquad \beta = f(b) = 2625$$

una primera aproximación es:

$$x_1 = \frac{b\,\alpha - a\,\beta}{\alpha - \beta} = 4{,}05$$

$$c = 4{,}05\,, \quad b = 5\,; \quad \beta = f(b) = 2625\,, \quad \gamma = f(4{,}05) = -\,116{,}65$$

$$x_2 = \frac{c\,\beta - b\,\gamma}{\beta - \gamma} = 4{,}09$$

$$d = 4{,}09\,, \quad b = 5\,; \quad \beta = 2625\,, \quad \delta = f(4{,}09) = -\,91{,}35$$

$$x_3 = \frac{d\,\beta - b\,\delta}{\beta - \delta} = 4{,}126$$

Solución:

4,126

4,205869227

ERRATAS ADVERTIDAS

PAGINA	LINEA	DICE	DEBE DECIR
6	1	$\cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 11 \\ 8 & -1 & 16 \\ 19 & -12 & 13 \end{bmatrix}$	$\cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 8 & -1 & 0 \\ 19 & -12 & -5 \end{bmatrix}$
6	3	*Solución:* $\begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{11} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-1} & \mathbf{16} \\ \mathbf{19} & \mathbf{-12} & \mathbf{13} \end{bmatrix}$	*Solución:* $\begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{19} & \mathbf{-12} & \mathbf{-5} \end{bmatrix}$
10	1	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
33	11	$\lvert 0 \quad 7-x-\sqrt{3} \quad 3x-2+\sqrt{5} \rvert$	$\lvert 0 \quad 5+x+\sqrt{3} \quad 3x-2+\sqrt{5} \rvert$
34	6	*Solución:* **– 1181**	*Solución:* **1181**
91	– 2	$1 - \left(\frac{\pi}{6} - 1\right)$	$1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)$
143	– 2	$2\,x^2 - (m-3)\,x + 3 - m = 0$	$2\,x^2 + (m-3)\,x + 3 - m = 0$
162	9	$\begin{array}{ccccc} & 0 & 12 & 0 & \\ \hline 1 & -9 & 12 & -4 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{ccccc} & 0 & 12 & 0 & \\ & & -2 & & \\ \hline 1 & 9 & 10 & -4 & 1 \end{array}$
162	10 y 11	*Solución:* $\mathbf{x^4 - 9\,x^3 + 12\,x^2 - 4\,x + 1 = 0}$	*Solución:* $\mathbf{x^4 - 9\,x^3 + 10\,x^2 - 4\,x + 1 = 0}$